Доклады Академии Наук СССР
1954. Том XCIX, № 5

ТЕХНИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

Н. С. ФАСТОВ

О КИНЕТИКЕ ОСТАТОЧНОЙ ДЕФОРМАЦИИ, ОБУСЛОВЛЕННОЙ САМОДИФФУЗИОННОЙ РЕЛАКСАЦИЕЙ НАПРЯЖЕНИЙ

(Представлено академиком Г. В. Курдюмовым 27 VIII 1954)

Если в твердом теле в результате действия внешних сил возникают упругие скалывающие напряжения (т. е. напряжения, не превосходящие предела упругости и отличные от напряжений равномерного всестороннего сжатия или растяжения), то такое тело находится в неравновесном состоянии, и в нем возникнут процессы перестройки упруго-деформированной решетки — процессы самодиффузионной релаксации напряжений. Последние приводят к снятию скалывающих напряжений, в результате чего появляется остаточная деформация*. Процессы самодиффузионной релаксации напряжений будут происходить до тех пор, пока тело не окажется подвергнутым равномерному всестороннему сжатию или полностью свободным от напряжений.

Появление остаточной деформации в результате самодиффузионной релаксации напряжений не означает пластического деформирования. При пластическом деформировании появляются микронапряжения (напряжения II и III рода), тогда как при самодиффузионной релаксации микронапряжения не появляются. Кроме того, при самодиффузионной релаксации после устранения внешних сил в каждой точке тела напряжения (в макроскопическом смысле) равны нулю, тогда как после устранения внешних сил при пластической деформации в случае наличия неоднородных напряжений появляются остаточные макронапряжения (например при кручении стержня).

Самодиффузионная релаксация напряжений при малых деформациях описывается уравнениями

$$\sigma_{ik} = K\varepsilon_{ll}\delta_{ik} + 2\mu\,(\varepsilon_{ik} - {}^1/_3\,\varepsilon_{ll}\delta_{ik} - \overset{*}{\varepsilon}_{ik}); \tag{1}$$

$$\overset{*}{\varepsilon}_{ik} = \frac{1}{\tau}\,(\varepsilon_{ik} - {}^1/_3\,\varepsilon_{ll}\delta_{ik} - \overset{*}{\varepsilon}_{ik}); \tag{2}$$

$$\overset{*}{\varepsilon}_{ll} = 0; \tag{3}$$

$$\frac{\partial\sigma_{ik}}{\partial x_k} = 0, \tag{4}$$

---

* Релаксацию упругих напряжений, обусловленную самодиффузией, можно описать при помощи тензора релаксации (самодиффузионной) (1), являющегося тензором остаточной деформации $\overset{*}{\varepsilon}_{ik}$. При этом неравновесная свободная энергия имеет вид

$$F = \frac{K}{2}\,\varepsilon_{ll}^2 + \mu(\varepsilon_{ik} - {}^1/_3\,\varepsilon_{ll}\,\delta_{ik} - \overset{*}{\varepsilon}_{ik})^2,$$

где ε_{ik} — тензор деформаций; K и μ — упругие модули.

где σ_{ik} — тензор напряжений; ε_{ik} — тензор деформации; $\overset{*}{\varepsilon}_{ik}$ — тензор остаточной деформации; δ_{ik} — единичный тензор; K — модуль всестороннего сжатия; μ — модуль сдвига; τ — время самодиффузионной релаксации.

Система уравнений (1)—(4) позволяет найти величину остаточной деформации, появившейся в результате самодиффузионной релаксации, в ряде случаев различных упруго-деформированных систем. Рассмотрим несколько примеров.

1. Кручение круглого стержня. Пусть один конец однородного изотропного круглого стержня закреплен неподвижно, а к другому в момент времени $t = 0$ приложен постоянный скручивающий момент M. Смещения в стержне в начальный момент времени будут (ось стержня направлена по оси z) [2]

$$u_x = -\lambda_0 yz; \quad u_y = \lambda_0 xz; \quad u_z = 0.$$

Угол закручивания на единицу длины стержня в начальный момент времени λ_0 равен

$$\lambda_0 = \frac{M}{\mu I},$$

где $I = \int (x^2 + y^2)\, dx\, dy = \pi R^4 / 2$ — момент инерции поперечного сечения стержня.

Остаточный вектор смещения u_i^* ищем в виде

$$u_x^* = -\lambda^* yz; \quad u_y^* = \lambda^* xz; \quad u_z^* = 0. \tag{5}$$

Из (2) и (5) следует

$$\overset{*}{\varepsilon}_{yz} = \frac{\dot{\lambda}^*}{2} x = \frac{\sigma_{yz}}{2\mu\tau}, \tag{6}$$

но

$$\sigma_{yz} = 2\mu\varepsilon_{yz}^0 = \mu\lambda_0 x. \tag{7}$$

Из (7) и (6) получим

$$\lambda^* = \frac{\lambda_0}{\tau} t, \tag{8}$$

$$\lambda = \lambda_0 \left(1 + \frac{t}{\tau}\right) = \lambda_0 + \lambda^*, \tag{9}$$

т. е. угол закручивания λ растет пропорционально времени действия скручивающего момента t. После устранения внешних сил напряжения в стержне отсутствуют и остаточный угол закручивания λ^* определяется из (8).

2. Чистый изгиб призматического стержня. Пусть к концевым сечениям стержня в начальный момент времени приложена пара сил с постоянным моментом M, вызывающая чистый изгиб призматического стержня. В этом случае распределение напряжений σ_{ik} и смещений в стержне u_i будет [2]

$$\sigma_{zz} = -\frac{E}{\rho_0} x; \quad u_x = \frac{z^2 + \nu(x^2 - y^2)}{2\rho_0}; \quad u_y = \frac{\nu xy}{\rho_0}; \quad u_z = -\frac{xz}{\rho_0},$$

где E — модуль Юнга; ν — коэффициент Пуассона; ρ_0 — радиус кривизны оси стержня в начальный момент времени, определяемый соотношением $\rho_0 = -EI/M$.

Остаточное смещение ищем в форме:

$$u_x^* = \frac{z^2 + \omega(x^2 - y^2)}{2R^*}; \quad u_y^* = \frac{\omega xy}{R^*}; \quad u_z^* = -\frac{xz}{R^*}. \tag{10}$$

Чтобы удовлетворить условию (3), необходимо в (10) положить $\omega = {}^1/_2$. Из (2) и (10) следует

$$\varepsilon^*_{zz} = \frac{\sigma_{zz}}{3\mu\tau}\, t = -\frac{Ex}{3\rho_0\mu\tau}\, t = -\frac{x}{R^*},$$

откуда

$$\frac{1}{R^*} = \frac{E}{3\mu\tau\rho_0}\, t = \frac{2(1+\nu)}{3\tau\rho_0}\, t, \tag{11}$$

т. е. остаточная кривизна изогнутого стержня $1/R^*$ (кривизна стержня после устранения внешних сил) растет пропорционально времени действия внешних сил t.

3. Усадка сферической поры. Пусть изотропное твердое тело, находящееся под внешним давлением, имеет сферическую полость радиуса R_0. Под влиянием внешнего давления и сил поверхностного натяжения на границе полости в твердом теле возникают скалывающие напряжения (напряжения, отличные от равномерного всестороннего сжатия). Последние вызовут самодиффузионную релаксацию напряжений, вследствие чего произойдет усадка поры. Найдем изменение радиуса поры со временем $R(t)$, считая размер поры малым по сравнению с размером тела.

Смещение в твердом теле, возникшее под влиянием упругих сил и обладающее сферической симметрией, будет [3]

$$u = ar + \frac{b}{r^2}. \tag{12}$$

Остаточное смещение u^* ищем в виде

$$u^* = \frac{b^*}{r^2},$$

где a, b, b^* — функции времени.

Деформации будут [3]

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial u}{\partial r} = a - \frac{2b}{r^3}; \quad \varepsilon_{\varphi\varphi} = \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{u}{r} = a + \frac{b}{r^3}; \tag{13}$$

$$\varepsilon^*_{rr} = \frac{\partial u^*}{\partial r} = -\frac{2b^*}{r^3}; \quad \varepsilon^*_{\varphi\varphi} = \varepsilon^*_{\theta\theta} = \frac{u^*}{r} = \frac{b^* - b}{r^3}. \tag{14}$$

Из (1), (13) и (14) получаем

$$\sigma_{rr} = 3Ka + 4\mu\frac{b^* - b}{r^3}. \tag{15}$$

На бесконечности давление P создается внешними силами, на границе поры — силами поверхностного натяжения, т. е.

$$\sigma_{rr} = -P \text{ при } r = \infty; \quad \sigma_{rr} = \frac{2\alpha}{R} \text{ при } r = R(t), \tag{16}$$

где α — коэффициент поверхностного натяжения.

Из (15) и (16) находим

$$a = -\frac{P}{3K}; \quad b - b^* = -\frac{\alpha}{2\mu}R^2 - \frac{P}{4\mu}R^3. \tag{17}$$

Скорость изменения смещения, вызванная самодиффузионной релаксацией напряжений $\dot{u}$, получаем из (12):

$$\dot{u} = \dot{a}r + \frac{\dot{b}}{r^2},$$

откуда, принимая во внимание, что на границе поры $\dot{u} = \dot{R}$, получим

$$\dot{b} = R^2\dot{R}. \tag{18}$$

Из (2) находим связь между величинами b^* и b:

$$\dot{b}^* = \frac{b - b^*}{\tau}. \tag{19}$$

Из (17), (18) и (19) находим уравнение для скорости изменения радиуса поры $\dot{R}$

$$\dot{R} = -\frac{R^2}{4\mu\tau}\frac{\frac{2\alpha}{R} + P}{\left(1 + \frac{3}{4}\frac{P}{\mu}\right)R + \frac{\alpha}{\mu}}. \tag{20}$$

Из (20) получаем

$$\left(1 + \frac{4\mu}{P}\right)\ln\frac{1 + \frac{P}{2\alpha}R}{1 + \frac{P}{2\alpha}R_0} + 2\ln\frac{R}{R_0} = -\frac{t}{\tau}. \tag{21}$$

Уравнение (21) справедливо при напряжениях, не превосходящих предела упругости, величина которого порядка $10^{-3}\,E$ (для достаточно низкой температуры). Принимая для металла $\alpha \sim 10^3$ эрг/см^2, $E \sim 10^{12}$ эрг/см^2, получим размер поры, когда применимо (21):

$$R \geqslant 10^{-6} \text{ см}.$$

При достаточно больших R, когда $PR/2\alpha \gg 1$, (21) примет вид

$$R = R_0 e^{-\frac{P}{4\mu\tau}t}. \tag{22}$$

При $P = 0$ (21) переходит в

$$R_0 - R + \frac{\alpha}{\mu}\ln\frac{R_0}{R} = \frac{\alpha}{2\mu\tau}\,t. \tag{23}$$

Если в (23) пренебречь членом $\frac{\alpha}{\mu}\ln\frac{R_0}{R}$ по сравнению с $R_0 - R$, то получим

$$R_0 - R = \frac{\alpha}{2\mu\tau}\,t. \tag{24}$$

Уравнение (24) получено Я. И. Френкелем* при определении скорости заплывания сферической поры методами гидродинамики ([4]).

Институт металловедения и физики
металлов ЦНИИЧМ

Поступило
26 VIII 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Б. Н. Финкельштейн, ДАН, Н. С. Фостов, **71**, 875 (1950). [2] М. М. Филоненко-Бородич, Теория упругости, М.—Л., 1947. [3] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Механика сплошных сред, М.—Л., 1953. [4] Я. И. Френкель, ЖЭТФ, **16**, 29 (1946).

* У Я. И. Френкеля ([4]) в формуле, аналогичной (24), стоит числовой коэффициент $^3/_4$ вместо нашего коэффициента $^1/_2$.