Доклады Академии Наук СССР
1954. Том XCIX, № 5

ФИЗИКА

Ю. М. ШИРОКОВ

К ВОПРОСУ О ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ЧАСТИЦ НОВОГО ТИПА СПИНА $^1/_2$ С ВНЕШНИМ ПОЛЕМ

(Представлено академиком Д. В. Скобельцыным 28 VII 1954)

В (1) было показано, что использование необходимых и достаточных условий релятивистской инвариантности позволяет получить новый класс релятивистских уравнений для элементарных частиц, характеризующийся тем, что для частицы спина s волновая функция имеет $2s+1$ компоненту. Наиболее интересным является случай $s = {}^1/_2$. При этом волновая функция имеет две компоненты и описывает частицу спина $^1/_2$ без античастицы (например нуклон без антинуклона). В настоящей статье будут исследованы вопросы о конечных преобразованиях Лоренца, о билинейных инвариантах и о введении взаимодействия с внешним полем для частиц нового типа спина $^1/_2$.

§ 1. Оператор бесконечно малого 4-поворота для частицы исследуемого типа спина $^1/_2$ получается из (10), (11) (1), если положить там *

$$\mathbf{S} = \frac{\vec{\sigma}}{2}. \tag{1}$$

Получение матрицы конечного трехмерного поворота не представляет затруднений, так как по отношению к трехмерным вращениям волновая функция является обычным спинором. При преобразовании Лоренца

$$x_\mu = \alpha_{\mu\nu}(\mathbf{v})\, x'_\nu \tag{2}$$

или, в развернутом виде:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}' - \mathbf{n}(\mathbf{n}\mathbf{x}') + \frac{\mathbf{n}(\mathbf{n}\mathbf{x}') + \mathbf{v}t'}{\sqrt{1-v^2}}, \quad t = \frac{t' + \mathbf{v}\mathbf{x}'}{\sqrt{1-v^2}}, \quad \mathbf{n} = \frac{\mathbf{v}}{v}, \tag{3}$$

волновая функция подвергается унитарному преобразованию

$$\Psi = S(\mathbf{v})\,\Psi'. \tag{4}$$

Для нахождения явного вида $S(\mathbf{v})$ можно использовать тензорные свойства оператора $M_{\mu\nu}$ из (7) (1), что приводит к соотношению

$$M_{\mu\nu}(p) = \alpha_{\mu\lambda}(\mathbf{v})\,\alpha_{\nu\sigma}(\mathbf{v})\,S(\mathbf{v})\,M_{\lambda\sigma}(p')\,S^{-1}(\mathbf{v}), \tag{5}$$

где $M_{\mu\nu}(p)$ и $M_{\lambda\sigma}(p')$ выражаются, соответственно, через p и p' согласно (10), (11) (1). Практически для нахождения $S(\mathbf{v})$ удобнее исполь-

* Здесь и в дальнейшем обозначения, вводимые без объяснений, те же, что и в (1). Пользуясь случаем, исправляем вкравшуюся в формулу (11) (1) опечатку: вместо $\sqrt{E^2+p^2}$ следует читать $\sqrt{E^2-p^2}$.

зовать не тензор $M_{\mu\nu}$, а определенный в (²) оператор спина

$$\Gamma_\sigma = \frac{1}{2i}\varepsilon_{\sigma\mu\nu\lambda}M_{\mu\nu}p_\lambda, \tag{6}$$

где $\varepsilon_{\mu\nu\lambda\sigma}$ — единичный полностью антисимметричный псевдотензор. Так как Γ_σ является псевдовектором, то он должен удовлетворять соотношению

$$\Gamma_\sigma(p) = \alpha_{\sigma\lambda}(\mathbf{v})\,S(\mathbf{v})\,\Gamma_\lambda(p')\,S^{-1}(\mathbf{v}). \tag{7}$$

Из (7) можно определить $S(\mathbf{v})$, оказывающуюся равной (для волновой функции в p-представлении)

$$S(\mathbf{v}) = \frac{(E+\sqrt{E^2-p^2})(k+1) - \mathbf{pv} + i\vec{\sigma}[\mathbf{pv}]}{\sqrt{2(E+\sqrt{E^2-p^2})(k+1)(E+k\sqrt{E^2-p^2}-\mathbf{pv})}}, \tag{8}$$

где $k = \sqrt{1-v^2}$.

В отличие от преобразований для обычных спинорных и тензорных волновых функций, $S(\mathbf{v})$ зависит от p. Поэтому преобразование Лоренца для волновой функции в x-представлении будет не локальным, а интегральным.

§ 2. Вследствие зависимости $S(\mathbf{v})$ от p величина

$$\Psi^+(p)\,\Psi(p') \neq \text{inv}$$

при разных p, p', вообще говоря, не является инвариантом. Инвариантом является величина

$$\Psi^+(p)\,U_{pp'}\Psi(p') = \text{inv}, \tag{9}$$

где $U_{pp'}$ — унитарная матрица преобразования волновой функции при повороте в плоскости векторов p, p' на угол между этими векторами. Инвариантность (9) следует из унитарности $S(\mathbf{v})$ и из того, что, согласно определению $U_{pp'}$, функция $U_{pp'}\Psi(p')$ преобразуется как $\Psi(p)$. Само преобразование поворота от p к p' имеет вид

$$x_\mu = \alpha_{\mu\nu}(p, p')\,x'_\nu,$$

где

$$\alpha_{\mu\nu}(p, p') = -2u_\mu u'_\nu + \delta_{\mu\nu} + \frac{(u_\mu + u'_\mu)(u_\nu + u'_\nu)}{1 - u_\lambda u'_\lambda},$$

$$u_\mu = \frac{p_\mu}{\sqrt{E^2-p^2}}, \quad u'_\mu = \frac{p'_\mu}{\sqrt{E'^2-p'^2}}, \quad u_0 = \frac{1}{i}u_4, \quad u'_0 = \frac{1}{i}u'_4. \tag{10}$$

Переход от четырех переменных p_μ к u_μ (из которых лишь три независимы, ибо $u_\mu^2 = -1$) и к $m = \sqrt{E^2-p^2}$ удобен, так как матрицы $S(\mathbf{v})$, $U_{pp'}$ зависят только от 4-скоростей u_μ. Заметим, что под $\sqrt{E^2-p^2}$ подразумевается корень, извлеченный не арифметически, а с тем же знаком, что и E:

$$\sqrt{E^2-p^2} = \frac{E}{|E|}\left|\sqrt{E^2-p^2}\right|. \tag{11}$$

$U_{pp'}$ находится тем же способом, что и $S(\mathbf{v})$, т. е. из соотношения

$$\Gamma_\sigma(p) = \alpha_{\sigma\lambda}(p, p')\,U_{pp'}\Gamma_\lambda(p')\,U^{-1}_{pp'}, \tag{12}$$

и оказывается равным

$$U_{pp'} = U_{uu'} = \frac{(u_0+1)(u'_0+1) - \mathbf{uu'} - i\vec{\sigma}[\mathbf{uu'}]}{\sqrt{2(u_0+1)(u'_0+1)(u_0u'_0 - \mathbf{uu'}+1)}}. \qquad (13)$$

§3. При помощи оператора $U_{pp'}$ можно образовывать не только скаляры, но и другие ковариантные величины, например векторы $\Psi^+(p)u_\mu U_{pp'}\Psi(p')$, $\varepsilon_{\mu\nu\lambda\sigma}\Psi^+(p)\Gamma_\nu(p)u_\lambda u'_\sigma U_{pp'}\Psi(p')$, псевдовектор $\Psi^+(p)\Gamma_\mu(p)U_{pp'}\Psi(p')$, псевдоскаляр $\Psi(p)\Gamma_\mu(p)u'_\mu U_{pp'}\Psi_{p'}$ и т. д.

Наличие билинейных ковариантов дает возможность вводить взаимодействие частиц нового типа с другими полями. Например, лагранжиан взаимодействия со скалярными мезонами будет иметь вид

$$L_{int} = g\int d^4x\, d^4x'\, d^4x''\, \Psi^+(x')\, U(x'-x,\, x''-x)\, \Psi(x'')\, \varphi(x), \qquad (14)$$

где g — константа связи; $\varphi(x)$ — оператор скалярного поля; $U(x_1, x_2)$ — оператор, фурье-компонента которого равна $U_{p_1p_2}$:

$$U(x_1, x_2) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4p_1 d^4p_2 e^{-ip_{\mu 1}x_{\mu 1}} U_{p_1p_2} e^{-ip_{\mu 2}x_{\mu 2}}. \qquad (15)$$

Инвариантность (14) непосредственно следует из (9), (15).

Аналогичным образом можно вводить взаимодействие с другими, например псевдоскалярными, мезонами. Взаимодействие является существенно нелокальным, что связано с интегральным характером преобразования Лоренца (8). Псевдоскалярный и псевдовекторный варианты взаимодействия с псевдоскалярными мезонами будут различаться между собой лишь множителем $m = \sqrt{E^2 - p^2}$. Если предположить, что лагранжиан взаимодействия зависит только от 4-скоростей, то взаимодействие с псевдоскалярными мезонами определяется однозначно с точностью до множителя, являющегося произвольной функцией от инварианта $u_\mu u'_\mu$.

§ 4. Так как при рассмотрении взаимодействия теория становится нелокальной, то нет оснований требовать локальности уравнения для свободной частицы. Необходимым и достаточным условием релятивистской инвариантности уравнения (1) [1] для элементарной частицы является не (3) [1], а более общее соотношение

$$[M_{\mu\nu}, L_\lambda]_- = i(L_\nu\delta_{\mu\lambda} - L_\mu\delta_{\nu\lambda}). \qquad (16)$$

Из (8) [1] непосредственно следует, что (16) выполняется при

$$L_\mu = A(m)\, p_\mu, \qquad (17)$$

где $A(m)$ — произвольная функция от переменной $m = \sqrt{E^2 - p^2}$. Выбирая $A = m^{-1}$, т. е. $L_\mu = u_\mu$ (по аналогии с уравнением Дирака), получим уравнение для свободной частицы в виде

$$(m - \varkappa)\Psi(m, u) = 0. \qquad (18)$$

После разложения волновой функции в интеграл Фурье по m, т. е. при выборе за одну из переменных собственного времени τ частицы, уравнение (18) перепишется в виде

$$\left(i\frac{\partial}{\partial\tau} - \varkappa\right)\Psi(\tau, u) = 0, \qquad (19)$$

где

$$\Psi(\tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int \Psi(m)\, e^{-im\tau}\, dm. \qquad (20)$$

Вследствие (11) уравнение (19), в отличие от скалярного уравнения, имеет решения только с положительными частотами и, несмотря на комплексность Ψ, описывает частицы только одного знака заряда. Отметим, что, как показано в [3], к виду (19) могут быть приведены и уравнения для волновых функций «обычных», например скалярных, дираковских и других частиц.

§ 5. В предлагаемой схеме математический вакуум совпадает с физическим, так как из-за отсутствия античастиц нет поляризации вакуума, а вследствие выбора уравнения для свободной частицы в виде (19) не появляются бесконечные «фоновые» энергии. По тем же причинам собственная энергия мезона равна нулю, и мезоны в отсутствие нуклонов не взаимодействуют между собой.

Отмечаемые в [4] трудности, связанные с несовместностью системы нелокальных уравнений в представлении взаимодействия, в настоящей схеме не возникают, так как уравнения движения получаются в гейзенберговском представлении. Макроскопическая причинность, повидимому, также будет иметь место, ибо в нерелятивистском приближении при малых относительных энергиях и импульсах (что соответствует большим относительным расстояниям) теория становится локальной.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
4 V 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Ю. М. Широков, ДАН, **94**, 857 (1954). [2] Ю. М. Широков, ЖЭТФ, **21**, 748 (1951). [3] Ю. М. Широков, Диссертация, МГУ, 1951. [4] М. А. Марков, ЖЭТФ, **25**, 527 (1953); Усп. физ. наук, **51**, 317 (1953).