Доклады Академии наук СССР
1955. Том 100, № 3

ФИЗИКА

М. Я. АЗБЕЛЬ

К ТЕОРИИ СКИН-ЭФФЕКТА В ПОСТОЯННОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

(Представлено академиком Л. Д. Ландау 18 VI 1954)

В настоящей работе находится поверхностный импеданс в постоянном магнитном поле **H**, параллельном поверхности металла*. Отражение электронов от поверхности считается диффузным.

Аналогично [2]

$$j_x(\xi) = \sigma^*_{xx}\int_0^\infty R_{xx}(\xi;\ \mu)\,E_x(\mu)\,d\mu;$$

$$j_q(\xi) = \sum_{p=2}^{3}\sigma^*_{pq}\int_0^\infty R_{pq}(\xi;\ \mu)\,E_p(\mu)\,d\mu \quad (p,\ q=2,\ 3); \tag{1}$$

$$R_{jk}(\xi;\ \mu) = K_{jk}(|\,\xi-\mu\,|) - \rho_{jk}(\xi;\ \mu) \quad (j,\ k=1,\ 2,\ 3);$$

$$K_{xx}(w) = \frac{3\gamma}{\pi\,\mathrm{sh}\,\pi\gamma}\int_0^{\pi/2}\cos^2\theta\,d\theta\int_0^{\pi}\mathrm{ch}\,\gamma\varphi\cdot k_1\left(\frac{w}{\sin\theta}-\cos\varphi\right)d\varphi;$$

$$\rho_{xx}(\xi;\ \mu) = -\frac{3\gamma e^{-\pi\gamma}}{\pi\,\mathrm{sh}\,\pi\gamma}\int_0^{\pi/2}\cos^2\theta\,d\theta\int_0^{\pi}\mathrm{ch}\,\gamma\varphi\cdot s\left[1-\left(\frac{\xi}{\sin\theta}-\cos\varphi\right)\right]\times$$

$$\times\ k_1\left(\frac{\mu-\xi}{\sin\theta}+\cos\varphi\right)d\varphi; \qquad k_1(\cos\lambda) = \frac{s(\sin^2\lambda)\,\mathrm{ch}\,\gamma\lambda}{\sin\lambda};$$

$$K_{pq}(w) = (-1)^{q-1}\frac{3\gamma}{\pi\,\mathrm{sh}\,\pi\gamma}\int_0^{\pi/2}\sin^2\theta\,d\theta\int_0^{\pi}k_q(\cos\varphi)\,k_p\left(\frac{w}{\sin\theta}-\cos\varphi\right)d\varphi;$$

$$\rho_{pq}(\xi;\ \mu) = (-1)^{q-1}\frac{3\gamma e^{-\pi\gamma}}{\pi\,\mathrm{sh}\,\pi\gamma}\int_0^{\pi/2}\sin^2\theta\,d\theta\int_0^{\pi}s\left[1-\left(\frac{\xi}{\sin\theta}-\cos\varphi\right)\right]\times$$

$$\times\ k_q(\cos\varphi)\,k_p\left(\frac{\mu-\xi}{\sin\theta}+\cos\varphi\right)d\varphi; \tag{2}$$

$$k_p(\cos\lambda) = \begin{cases}\dfrac{s(\sin^2\lambda)\cos\lambda\,\mathrm{ch}\,\gamma\lambda}{\sin\lambda} & (p=2);\\ s(\sin^2\lambda)\,\mathrm{sh}\,\gamma\lambda & (p=3);\end{cases} \qquad s(w) = \begin{cases}1 & (w>0);\\ 0 & (w<0);\end{cases}$$

$$\sigma^*_{jk} = \frac{ne^2\tau}{\sqrt{m_j m_k}}\frac{1}{\nu} = \sigma_{jk}\frac{1}{\nu}; \quad \xi = \frac{z}{r}; \quad r = -\frac{c\sqrt{2m_y\varepsilon_0}}{eH}; \gamma = \frac{r}{l^*_z} = \frac{r}{l_z}\nu = \frac{H_0}{H}\nu;$$

$$\nu = 1 + i\omega\tau; \quad H_0 = -\frac{c\sqrt{m_y m_z}}{e\tau}; \quad \delta^*_{jk} = \sqrt{\frac{c^2}{2\pi\omega\sigma^*_{jk}}};$$

* Импеданс в постоянном магнитном поле, нормальном поверхности металла, определялся в [1].

$$E_q''(\xi) = \frac{4\pi i\omega r}{c^2} j_q(\xi); \quad j_z(\xi) = 0\ *. \tag{2a}$$

Здесь ε_0 и n — энергия и плотность электронов; l_z и τ — длина и время их свободного пробега (все величины берутся на границе фермиевского распределения); H_0 — поле, при котором радиус закругления r электронов в магнитном поле равен длине свободного пробега l_z; $\sigma_{jk}\delta_{jk}$ — тензор статической проводимости массивного металла при $H = 0$. Предполагается, что направление распространения электромагнитной волны перпендикулярно поверхности металла $z = 0$ и совпадает с главной осью тензора эффективных масс, а магнитное поле **H** направлено вдоль главной оси Ox.

Из (2) уравнения Максвелла (2a) для напряженности электрического поля $E_j(\xi)$ могут быть записаны в виде:

$$E_x''(\xi) = ia_{xx}^* \int_{-\infty}^{\infty} K_{xx}(|\xi - \mu|) E_x(\mu)\, d\mu - ia_{xx}^* \int_0^{\infty} Q_{xx}(|\xi|;\ \mu) E_x(\mu)\, d\mu;$$

$$E_y''(\xi) = \sum_{j=2}^{3} ia_{jy}^* \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} K_{jy}(|\xi - \mu|) E_j(\mu)\, d\mu - \int_0^{\infty} Q_{jy}(|\xi|;\ \mu) E_j(\mu)\, d\mu \right\}; \tag{3}$$

$$\sum_{j=2}^{3} \sqrt{\frac{m_z}{m_j}} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} K_{jz}(|\xi - \mu|) E_j(\mu)\, d\mu - \int_0^{\infty} Q_{jz}(|\xi|;\ \mu) E_j(\mu)\, d\mu \right\} = 0;$$

$$Q_{jk}(\xi;\ \mu) = K_{jk}(\xi + \mu) - \rho_{jk}(\xi;\ \mu); \quad a_{jk}^* = 2r^2/\delta_{jk}^{**} = a_{jk}/\nu,$$

где функция $E_j(\xi)$ четно продолжена для $\xi < 0$:

$$E_j(-\xi) = E_j(\xi). \tag{4}$$

Перейдем теперь от уравнений (3) для функций $E_j(\xi)$ к уравнениям для их трансформаций Фурье $E_j(t) = 2\int_0^{\infty} E_j(\xi) \cos \xi t\, d\xi$; получим:

$$-t^2 E_x(t) - 2E_x'(0) = ia_{xx}^* K_{xx}(t) E_x(t) - ia_{xx}^* \int_{-\infty}^{\infty} Q_{xx}(t;\ \tau) E_x(\tau)\, d\tau;$$

$$-t^2 E_y(t) - 2E_y'(0) = \sum_{j=2}^{3} ia_{jy}^* \left\{ K_{jy}(t) E_j(t) - \int_{-\infty}^{\infty} Q_{jy}(t;\ \tau) E_j(\tau)\, d\tau \right\}; \tag{5}$$

$$\sum_{j=2}^{3} \sqrt{\frac{m_z}{m_j}} \left\{ K_{jz}(t) E_j(t) - \int_{-\infty}^{\infty} Q_{jz}(t;\tau) E_j(\tau)\, d\tau \right\} = 0,$$

где

$$K_{jk}(t) = 2\int_0^{\infty} K_{jk}(\xi) \cos \xi t\, d\xi; \quad Q_{jk}(t;\ \tau) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \cos \xi t\, d\xi \int_0^{\infty} e^{i\mu\tau} Q_{jk}(\xi;\ \mu)\, d\mu.$$

---

* Отметим, что пренебрежение током смещения эквивалентно пренебрежению $h^3 \operatorname{div} \mathbf{E} \Big/ \left(8\pi e \int_{\varepsilon(\mathbf{p})=\varepsilon_0} \frac{dS}{V}\right) \ll \frac{V}{c}\left(\frac{\omega}{\sigma}\right)^{1/3} \cdot e\mathbf{VE} \ll e\mathbf{VE}$ по сравнению с $e\mathbf{VE}$.

Рассмотрим два предельных по a^*_{jk} случая:

1. $|a^*_{jk}| \ll 1$ ($|\delta^*_{jk}| \gg r$) — достаточно низкие частоты. В этом случае при любой длине l_z свободного пробега электронов уравнения (5) могут быть решены методом последовательных приближений. В нулевом приближении членом $a^*_{jk}\int\limits_{-\infty}^{\infty} Q_{jk}(t;\ \tau)\,E_j(\tau)\,d\tau$ можно пренебречь, и импеданс

$$Z_j = -\frac{4\pi i\omega r}{c^2}\frac{E_j(0)}{E'_j(0)} = \frac{8i\omega r}{c^2}\int\limits_0^\infty \frac{dt}{t^2 + ia^*_{jj}K_j(0)} = \sqrt{\frac{2\pi\omega}{c\sigma^*_{jj}}}(1+i) \quad (j=1,2); \quad (6)$$

$$\frac{\omega\tau}{\sqrt{1-(\omega\tau)^2}} \ll \left(\frac{\delta^j_\infty}{l_z}\right)^2\left(\frac{H}{H_0}\right)^2, \quad \delta^j_\infty = \sqrt{\frac{c^2\tau}{2\pi\sigma_{jj}}}, \quad (6a)$$

совпадет с импедансом при классическом скин-эффекте ($|\delta^*_k / l^*_z| \ll 1$). Этого следовало ожидать, так как при $|\delta^*_{jk}| \gg r$ электрическое поле в металле является квазистатическим, и проводимость в нулевом приближении не зависит от магнитного поля.

2. $|a^*_{jk}| \gg 1$ ($|\delta^*_{jk}| \ll r$) — достаточно высокие частоты. Для простоты рассмотрим только наиболее интересный случай сильных магнитных полей ($|\gamma| \ll 1$, т. е. $H/H_0 \gg \sqrt{1+(\omega\tau)^2}$). В этом случае уравнения (5) для E_x и E_y имеют в нулевом приближении по γ и $a^{-1/3}_{jk}$ вид:

$$-t^2 w_p(t) - 1 = \frac{3}{8t}\frac{i}{\nu}\,w_p(t); \quad E_p(t) = -2E'_p(0)\,a^{-2/3}_{pp} w_p(t a^{-1/3}_{pp}) \ (p=1,2).$$

Отсюда легко находится нулевое приближение для импеданса:

$$Z_j = \frac{8}{9}\left(\frac{\sqrt{3}\,\pi\omega^2\cdot 2\pi r}{c^4\sigma^*_{jj}}\right)^{1/3}(1+i\sqrt{3}) =$$

$$= (1+(\omega\tau)^2)^{1/6}\left(\frac{2\pi H_0}{H}\right)^{1/3}\frac{16}{9}\left(\frac{\sqrt{3}\,\pi\omega^2 l_z}{c^4\sigma_{jj}}\right)^{1/3} e^{i\frac{\pi+\operatorname{arc\,tg}\omega\tau}{3}}; \quad (7)$$

$$(\delta^j_\infty / l_z)^2 \ll \omega\tau \ll l_z/\delta^j_\infty; \quad V\sqrt{2\pi mn}\cdot|1+i/\omega\tau|^{-1/2} \gg H \gg H_0\cdot|1+i\omega\tau|;$$

$$\frac{X_p}{R_p} = \frac{\sqrt{3}+\operatorname{tg}(1/3\operatorname{arc\,tg}\omega\tau)}{1-\sqrt{3}\operatorname{tg}(1/3\operatorname{arc\,tg}\omega\tau)} \quad (p=1,2). \quad (8)$$

Отметим, что зависимость импеданса от частоты и магнитного поля может быть получена из теории классического скин-эффекта введением эффективной проводимости $\sigma^j_{\text{эфф}} = \sigma^*_{jj}\frac{\beta\delta_{\text{эфф}}}{2\pi r}$ (аналогично тому, как это было сделано для случая аномального скин-эффекта в [4, 5]). Здесь $\delta_{\text{эфф}}$ — эффективная глубина скин-слоя; β — комплексная постоянная. В данном случае величина β такая же, как и при $H=0$ и зеркальном отражении электронов от поверхности, т. е. $\beta = \left(\frac{9}{8}\right)^3\frac{\pi}{\sqrt{3}}(1-i)$.

Полученное выражение (7) для импеданса в магнитном поле отличается при данном σ^*_{jj} от формулы (7) работы [1]

$$Z_j = \frac{8}{9}\left(\frac{\sqrt{3}\,\pi\omega^2 l^*_z}{c^4\sigma^*_{jj}}\right)^{1/3}(1+i\sqrt{3})$$

(где $H=0$, $|\delta^*_{jj}/l^*_z| \ll 1$; отражение электронов от поверхности предполагается зеркальным) лишь тем, что роль $l^*_z = l_z/(1+i\omega\tau)$ играет $2\pi r$. Однако, в отличие от l^*_z/σ^*_{jj}, величина $2\pi r/\sigma^*_{jj}$ зависит от часто-

ты и магнитного поля. Поэтому в выражение для импеданса Z_j в постоянном магнитном поле входит зависящий от частоты и магнитного поля множитель

$$(1+(\omega\tau)^2)^{1/6}\left(\frac{2\pi H_0}{H}\right)^{1/3} e^{i\frac{\operatorname{arc\,tg}\omega\tau}{3}},$$

который существенно меняется при релаксации. (При аномальном скин-эффекте в отсутствие магнитного поля релаксация не сказывается.)

Из (7) видно, что с ростом частоты X_j/R_j возрастают X_j и R_j, причем в предельных случаях имеем:

1. $\omega\tau \ll 1$ — достаточно низкие частоты;

$$Z_j \approx \frac{8}{9}\left(\frac{2\pi H_0}{H}\right)^{1/3}\left(\frac{\sqrt{3}\pi\omega^2 l_z}{c^4\sigma_{jj}}\right)^{1/3}(1+i\sqrt{3}) \sim \omega^{2/3};$$
$$\frac{X_j}{R_j} \approx \sqrt{3} \quad (V\sqrt{2\pi mn}\,(\omega\tau)^{-1/3} \gg H \gg H_0). \tag{9а}$$

2. $\omega\tau \gg 1$ — достаточно высокие частоты;

$$R_j \approx \frac{2}{3}\left(\frac{\sqrt{3}\pi l_z}{c^4\tau^2\sigma_{jj}}\right)^{1/3}\left(\frac{2\pi H_0}{H}\right)^{1/3} = \text{const}\,(\omega);$$
$$X_j = 2\left(\frac{\sqrt{3}\pi l_z\tau}{c^4\sigma_{jj}}\right)^{1/3}\omega\left(\frac{2\pi H_0}{H}\right)^{1/3} \sim \omega \quad \left(X_j \approx \text{const}\,(\tau),\ R_j \sim \frac{1}{\tau^{2/3}}\right); \tag{9б}$$
$$\frac{X_j}{R_j} = 3\omega\tau \quad (V\sqrt{2\pi mn} \gg H \gg H_0\omega\tau).$$

Экспериментальное определение импеданса массивного металла в постоянном магнитном поле, параллельном поверхности, дало бы возможность вычислить по (7) $\omega\tau$ (измеряя X_j/R_j) и σ_{jj}/r (измеряя X_j или R_j). Величины σ_{jj} и σ_{jj}/l_z могут быть найдены для того же образца металла из измерений при $H=0$ статической проводимости и импеданса при аномальном скин-эффекте. Таким образом, получаем четыре соотношения* для определения трех независимых величин (эффективной массы m_j, длины свободного пробега l_j и граничной фермиевской энергии ε_0 электронов**).

Поэтому, находя при произвольных ω и H σ_{jj}, $l_j = \frac{l_j}{\sigma_{jj}}\sigma_{jj}$ и $r = \frac{r}{\sigma_{jj}}\sigma_{jj}$, можно проверить универсальное равенство:

$$\frac{\sigma_{jj}}{l_j^2}\frac{l_x l_z}{l_y}\left(\frac{c}{Hr}\right)^2 = \frac{e^4}{3\pi^2\hbar^3} = 6{,}195\cdot 10^{39}\ \text{CGSE} \quad (j=1,\,2). \tag{10}$$

В заключение я считаю своим приятным долгом поблагодарить М. И. Каганова и Г. Я. Любарского за ценные дискуссии.

Поступило
17 VI 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] М. Я. Азбель, М. И. Каганов, ДАН, **95**, 41 (1954). [2] М. Я. Азбель, ДАН, **99**, № 4 (1954). [3] G. E. H. Reuter, E. H. Sondheimer, Proc. Roy. Soc., A, **195**, 336, (1948). [4] A. B. Pippard, ibid., **191**, 385 (1947). [5] В. Л. Гинзбург, Усп. физ. наук, **42**, 333 (1950).

* Заметим, что пятое соотношение может дать измерение электронной теплоемкости.

** Остальные величины найдутся из $p_j^0 = V\sqrt{2m_j\varepsilon_0}$, $V_j = \sqrt{\frac{2\varepsilon_0}{m_j}}$, $\tau = \frac{l_j}{V\sqrt{2\varepsilon_0/m_j}}$, $n = \frac{\sqrt{(2\varepsilon_0)^3 m_x m_y m_z}}{3\pi^2\hbar^3}$.