

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

Б. В. МЕДВЕДЕВ

**К ВОПРОСУ ОБ УНИТАРНОСТИ S -МАТРИЦЫ В КВАНТОВОЙ
ТЕОРИИ ПОЛЯ С НЕЛОКАЛЬНЫМ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕМ**

(Представлено академиком Н. Н. Боголюбовым 24 IX 1954)

Наличие известных трудностей в построении квантовой теории взаимодействующих полей побуждает искать пути для принципиальной модификации теории. Одним из направлений таких поисков является рассмотрение теорий с нелокальным взаимодействием; это направление объясняется не только надеждой полностью избавиться от расходящихся выражений, но и физической неудовлетворительностью представления о точечных частицах (точнее, именно о точечном взаимодействии, так как говорить о положении и форме невзаимодействующей частицы смысла не имеет).

В последнее время подробно рассматривался ^(1, 2) один из вариантов такой теории, характеризующийся взаимодействием:

$$S^{int} = \int dx' dx'' dx''' \Lambda(x', x'', x'''), \quad (1)$$

с «лагранжианом»

$$\Lambda(x', x'', x''') = \frac{g}{2} F(x', x'', x''') (\bar{\psi}(x') u(x'') \psi(x''') - \psi(x''') u(x'') \bar{\psi}(x')) \quad (2)$$

($\psi, \bar{\psi}$ — операторы спинорного поля, u — скалярного, $F(x', x'', x''')$ — форм-фактор, g — константа связи).

Так как (1) и (2) приводят к интегро-дифференциальным уравнениям для операторов поля, то непосредственный переход к представлению взаимодействия не оказывается возможным. Поэтому для интегрирования получающихся из (1) и (2) уравнений был использован ⁽²⁾ метод Янга — Фельдмана ⁽³⁾ и Каллена ⁽⁴⁾. При этом возникает весьма существенный вопрос об унитарности матрицы S . (Обычное доказательство ^(5, 3) унитарности неприменимо в нелокальной теории, поскольку в ней невозможно расщепить S -матрицу в последовательность множителей, выражающихся в виде интегралов по последовательным во времени «слоям» пространства — времени.)

Блох ⁽²⁾ приводит два доказательства унитарности S -матрицы, однако оба они недостаточны. Дефект первого состоит в неявном недоказанном допущении, что амплитуды Фурье уходящих полей обязательно образуют неприводимое представление операторов, удовлетворяющих соответствующим уравнениям Гамильтона ⁽⁶⁾. Неправильность второго основана на неверном утверждении, что правило для нахождения уходящих полей в виде ряда теории возмущений

$$\begin{aligned} \psi^{out} &= \sum_{n=0} (-i)^n \psi^{out(n)}; \\ \psi^{out(n)}(x) &= \int dx'_1 dx''_1 \dots dx''_n [\dots [\psi^{in}(x), \Lambda_1], \Lambda_2], \dots \Lambda_n]. \end{aligned} \quad (3)$$

(смысл индекса t см. (2)) пригодно и для любых построенных из них одночленов или многочленов. В действительности легко убедиться, что такое утверждение справедливо только для одночленов, т. е. что полученный в (2) «закон композиции» обладает только ассоциативным, но не дистрибутивным свойством. Поэтому вывод о совпадении перестановочных соотношений для уходящих полей с таковыми для падающих не доказан.

Недавно Хаяши (7) показал, что вычисленные при помощи (3) уходящие поля $\psi^{out}(x)$, $\psi^{out}(y)$ в двух разных точках перестают в четвертом приближении по g антикоммутировать * друг с другом. Это означает, что в четвертом порядке нарушается унитарность S -матрицы и доказывает несостоятельность обоих приведенных в (2) доказательств. Тем самым была поставлена под сомнение физическая ценность всей развитой в (1, 2) теории.

Мы покажем сейчас, что в действительности результат (7) не имеет большого физического значения. Дело в том, что в (7) использовался не лагранжиан (2), а неантисимметризованный в $\bar{\psi}$ и ψ лагранжиан

$$\Delta'(x', x'', x''') = gF(x', x'', x''') \bar{\psi}(x') u(x'') \psi(x'''), \quad (2')$$

не освобожденный от нулевого заряда вакуума и зарядово не симметричный.

Член четвертого порядка в $[\psi(x), \psi(y)]_+$ можно представить в виде суммы частных коммутаторов:

$$[\psi(x), \psi(y)]_+ = [\psi^{(4)}(x), \psi^{in}(y)]_+ + [\psi^{(4)}(y), \psi^{in}(x)]_+ + \\ + [\psi^{(3)}(x), \psi^{(1)}(y)]_+ + [\psi^{(3)}(y), \psi^{(1)}(x)]_+ + [\psi^{(2)}(x), \psi^{(2)}(y)]_+. \quad (4)$$

Каждый из этих коммутаторов выражается при использовании лагранжиана (2') в виде суммы ряда членов, содержащих по четыре оператора свободного поля (члены «4»), и ряда членов, содержащих по два оператора свободного поля (члены «2»), причем в силу возможности переставить некоммутирующие операторы разбиение на члены типа «4» и члены типа «2» естественно неоднозначно (вычисления удобнее производить, не переходя к нормальным произведениям). В частности, можно выбрать такой порядок расположения операторов, что все члены «4» из четырех последних частных коммутаторов в (4) станут подобными какому-либо из членов «4» первого частного коммутатора; при этом останется минимум один член «2».

Произведения операторов поля в отдельных членах «4» и «2» в сумме (4) имеют коэффициентами определенные комбинации функций D , S и ϑ ($\vartheta(x) = +1$, если $x > 0$, и $\vartheta(x) = 0$, если $x < 0$). После указанного приведения подобных членов во всех членах «4» возникают такие комбинации ϑ -функций, которые обращаются в нуль для $x_4 = +\infty$, т. е. все соответствующие члены обращаются в нуль для уходящих полей.

С обязательно присутствующим членом «2» дело обстоит иначе — возникающая в нем комбинация ϑ -функций при $x_4 = +\infty$ нуля не дает, поэтому именно он и разрушает унитарность. (Переставляя операторы в членах «4», можно получить, конечно, и другие члены «2», но они будут для уходящих полей обращаться в нуль.)

Дело существенным образом меняется, если использовать не (2'), а зарядово-симметричный лагранжиан (2). При этом каждый из частных

* В действительности в (7) рассматривался случай не фермиевских, а бозевских ψ , поэтому там шла речь о коммутаторе, однако это не играет роли: выкладка показывает, что для фермиевских ψ положение точно такое же, сохраняется даже вид нарушающего антикоммутативность (коммутативность) члена.

коммутаторов в (4) можно выразить в виде суммы ряда членов «4», каждый из которых будет теперь содержать не просто произведение четырех операторов свободного поля, а произведение, определенным образом симметризованное (антисимметризованное). Если теперь выбрать для частных коммутаторов в (4) такой вид, при котором члены «2» отсутствуют, то окажется, что все члены «4» из четырех последних частных коммутаторов автоматически подобны членам «4» из первого частного коммутатора. При приведении этих подобных членов возникают те же самые комбинации δ -функций, что и в членах «4» при использовании лагранжиана (2'), которые, как уже было отмечено, все обращаются в нуль для $x_4 = +\infty$.

Таким образом, оказывается, что теория поля с нелокальным взаимодействием, предложенная в (1, 2), приводит к S -матрице, унитарной по крайней мере до четвертого порядка, если исходить из зарядово-симметричного лагранжиана (2). В то же время такая теория приводит в четвертом порядке к неунитарной S -матрице, если исходить из зарядово-несимметричного лагранжиана (2').

Иными словами, вскрывается то любопытное и несколько неожиданное обстоятельство, что в нелокальной теории унитарности S -матрицы можно достигнуть только после исключения нулевого заряда. Это может дать повод подозревать, что в дальнейших приближениях, возможно, унитарность будет достигаться только для перенормированной матрицы S , в отличие от локальной теории, где унитарна и перенормированная S -матрица.

Следует, впрочем, заметить, что утверждение об унитарности перенормированной S -матрицы в локальной теории имеет весьма малый смысл, так как, строго говоря, перенормированной S -матрицы в локальной теории вообще не существует. В нелокальной же теории, напротив, можно надеяться на сходимость всех обычно расходящихся интегралов, почему утверждение об унитарности перенормированной S -матрицы могло бы иметь вполне определенный смысл.

В заключение автор пользуется случаем выразить благодарность акад. Н. Н. Боголюбову за обсуждение работы и ряд ценных указаний, а также В. А. Бонч-Бруевичу за плодотворную дискуссию.

Математический институт им. В. А. Стеклова
Академии наук СССР

Поступило
18 VIII 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ P. Kristensen, C. Møller, Dan. Mat. Fys. Medd., **27**, No. 7 (1952).
² C. Bloch, *ibid.*, **27**, No. 8 (1952). ³ C. N. Yang, D. Feldman, Phys. Rev., **79**, 792 (1950). ⁴ G. Källén, Ark. f. Fys., **2**, 187 (1950); **2**, 371 (1951). ⁵ F. J. Dyson, Phys. Rev., **75**, 468 (1949). ⁶ E. Wigner, *ibid.*, **77**, 711 (1950). ⁷ C. Hayashi, Progr. Theor. Phys., **10**, 533 (1953).