

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

Академик Н. Н. БОГОЛЮБОВ и О. С. ПАРАСЮК

**О ВЫЧИТАТЕЛЬНОМ ФОРМАЛИЗМЕ ПРИ УМНОЖЕНИИ
ПРИЧИННЫХ СИНГУЛЯРНЫХ ФУНКЦИЙ**

Исходя из представления (2) работы (1) для причинных сингулярных функций, легко получить импульсное представление произведения регуляризованных причинных функций, соответствующего некоторой связной диаграмме $G(x_1, x_2, \dots, x_n)$, в виде:

$$I_M(\dots k \dots) = \delta\left(\sum k\right) \int_0^\infty \dots d\alpha_1 \dots f(\dots k \dots \alpha) \times \\ \times \exp\left[-i \sum \alpha_i m_i^2 - \varepsilon \sum \alpha_i\right] \prod I(\alpha_i), \quad (1)$$

где

$$f(\dots k \dots \alpha) = F(\dots k \dots \alpha) \exp\left[i \sum_{a,b} A_{a,b}(\alpha) k_a k_b\right];$$

$\sum A_{ab} k_a k_b$ — квадратичная форма; $F(\dots k \dots \alpha)$ — рациональная функция α_i с полюсами при $\alpha_i = 0$. Эти полюсы погашаются, однако, нулями функций $I(\alpha_i)$. При $M \rightarrow \infty$ $I(\alpha_i) \rightarrow 1$ и интегралы по α_i расходятся при $\alpha_i \rightarrow 0$, что соответствует расходимости при больших импульсах.

Этим недостатком не будет обладать выражение $R(G)$, как это следует из приведенных ниже теорем.

Теорема 1. *Выражение $\overline{R(G_1 G_2 \dots G_s)}$ будет функцией вида:*

$$\overline{R(G_1 G_2 \dots G_s)} = \\ = \delta\left(\sum k\right) \int_0^\infty \dots d\alpha_1 \dots \exp\left[-i \sum \alpha_i m_i^2 - \varepsilon \sum \alpha_i\right] \times \\ \times \prod_i I(\alpha_i) \frac{f(\dots \sqrt{\alpha} k \dots \sqrt{\alpha} \omega \dots \sqrt{\alpha})}{\Phi_r(\dots \sqrt{\alpha_i} \dots)} \exp\left[i \sum A_{G_a G_b} p_a p_b\right], \quad (2)$$

где $p_a = \sum_{G_a} k$ или $p_a = \sum_{G_a} \omega$; $\bar{\alpha}$ — однородная рациональная функция

первой степени по α_i ; $f(\dots \sqrt{\alpha} k \dots \sqrt{\alpha} \omega \dots \sqrt{\alpha})$ — полином по всем своим аргументам; $\Phi_r(\dots \sqrt{\alpha_i} \dots)$ — однородная рациональная функция $\sqrt{\alpha_i}$ степени r ;

$$r = \sum r[\Delta(G_a)] + \sum r_i + 4L - 4(s-1);$$

r_l — степень полинома функции распространения, соответствующей линии l ; $r[\Delta(G_a)]$ — степень полинома $\Delta(G_a)$; L — полное число линий между базисными узлами; s — число всех базисных узлов; $\sum A_{G_a G_b}(\alpha) x_a x_b$ — однородная рациональная функция первой степени по α_i , обладающая свойствами: а) когда все $\alpha_i > 0$, квадратичная форма по x определено положительная; б) $\sum A_{G_a G_b}(\alpha) x_a x_b \leq \sum \alpha_i \left(\sum_l |x_l| \right)^2$.

Теорема 2. Пусть $G = G_1 G_2 \dots G_s$ — связная диаграмма; $r[\Delta(G_i)]$ — степень полинома $\Delta(G_i)$; γ_i — степень полинома функции распространения, соответствующей линии l , соединяющей G_1 с G_h . Возьмем числа

$$\bar{r}[\Delta(G_i)] \geq r[\Delta(G_i)]; \quad \bar{\gamma}_i \geq \gamma_i.$$

Положим для обобщенных узлов Γ_α

$$\gamma(\Gamma_\alpha) = \sum \bar{r}[\Delta(G_k)] + \sum \bar{\gamma}_i + 2L - 4(s-1), \quad (3)$$

где суммирование происходит по тем G_k , из которых состоит Γ_α и тем l , которые соединяют упомянутые G_k ; s — число элементарных узлов в Γ_α ; L — число линий в Γ_α .

При так определенных $\gamma(\Gamma_\alpha)$ введем операцию

$$\begin{aligned} R(G_1 G_2 \dots G_s | \dots \Omega_T) = \\ = \delta \left(\sum k \right) \int_0^\infty \dots d\alpha_l \dots \exp \left[-i \sum \alpha_l m_l^2 - \varepsilon \sum \alpha_l \right] \times \\ \times \prod I(\alpha_l) F(\dots k \dots \omega \dots \alpha) \exp \left[i \sum A_{G_a G_b} p_a p_b \right]. \end{aligned} \quad (4)$$

Тогда функция $F(\dots k \dots \omega \dots \alpha)$, являющаяся полиномом по k, ω и рациональной функцией по α_i , будет удовлетворять неравенству

$$|F(\dots k \dots \omega \dots \alpha)| \leq \frac{C(\dots k \dots \omega \dots \alpha)}{\prod_l \alpha_l^{1 - \frac{1}{2L}}}, \quad (5)$$

где $C(\dots k \dots \omega \dots \alpha)$ — ограниченное полиномиально выражение; L — полное число линий диаграммы $G = G_1 \times G_2 \times \dots \times G_s$.

Теоремы 1 и 2 доказываются методом математической индукции, причем основой для этого служит итерационная формула (7) статьи (1). Приведем в основных чертах доказательство теоремы 2.

Доказательство. Случай диаграммы из 2 базисных узлов и m линий проверяется непосредственно. Пусть теорема верна для всех связных диаграмм с числом линий не большим чем $m \geq s-1$ и числом узлов не большим чем s . Докажем ее для диаграммы с числом линий $L = m+1$.

Рассмотрим диаграмму с s узлами и $m+1$ линиями. Возможны два случая: либо снятие одной из линий нарушает связность $G = G_1 G_2 \dots G_s$, либо снятие одной любой линии не нарушает связности. Первый случай, как более простой, из-за отсутствия места рассматривать не будем; заметим только, что рассмотрение этого случая автоматически реализует индукцию по числу узлов.

Во втором случае воспользуемся итерационной формулой (7) ⁽¹⁾ в предположении, что исследуется как раз влияние линии 1—2. Легко заметить, что предположения индукции выполняются не только для $R(G_1 G_2 \dots G_s)$, но и для $R_{12}(G_1 G_2 \dots G_s)$. Отсюда выводим неравенство

$$|F^*(\dots k \dots \omega \dots \alpha)| \leq \frac{K}{\prod_l \alpha_l^{1-\frac{1}{2L}}} \frac{1}{\alpha_{12}^d}, \quad (6)$$

где d — положительное число, а звездочка означает, что F взято с учетом новой добавленной линии.

Так как мы могли снять любую линию, не нарушая связности, то снимем ту, у которой α_l наибольшее. Для нее

$$\alpha_{ab} \geq \frac{1}{L} \sum_l \alpha_l.$$

Отсюда выводим

$$|F^*(\dots k \dots \omega \dots \alpha)| \prod_l \alpha_l^{1-\frac{1}{2L}} \leq \frac{K^*(\dots k \dots \omega \dots \alpha)}{(\sum_l \alpha_l)^d}. \quad (7)$$

Теперь заметим, что

$$R^*(G_1 G_2 \dots G_s) = [1 - M(G)] \overline{R^*(G_1 G_2 \dots G_s)}, \quad (8)$$

т. е. R^* равно остаточному члену для ряда Тейлора от $\bar{R}^*$ по степеням $(k - \omega)$, $\nu(G)$ -го порядка:

$$R^*(G_1 G_2 \dots G_s) = \frac{1}{\nu!} \int_0^1 (1 - \tau)^{\nu} \frac{\partial^{\nu+1}}{\partial \tau^{\nu+1}} \overline{R^*(G_1^{\tau} G_2^{\tau} \dots G_s^{\tau})} d\tau, \quad (9)$$

где значок τ показывает, что вместо k надо подставить $\omega + \tau(k - \omega)$.

В силу теоремы 1 отсюда легко следует, что

$$F^*(\dots k \dots \omega \dots \alpha) = \frac{f^*(\dots \sqrt{\alpha} k \dots \sqrt{\alpha} \omega \dots \sqrt{\alpha})}{\Phi_{r-(\nu+1)}^*(\dots \sqrt{\alpha_l} \dots)}. \quad (10)$$

Положим теперь

$$t = \sum \alpha_l; \quad \alpha'_l = \frac{1}{t} \alpha_l; \quad \sum \alpha'_l = 1.$$

В силу свойств функции f^* и Φ^* на основе (7) получим

$$\left| \frac{f^*(\dots \sqrt{\alpha'_l} k \dots \sqrt{\alpha'_l} \omega \dots t \sqrt{\alpha'_l})}{\Phi_{r-(\nu+1)}^*(\dots \sqrt{\alpha'_l} \dots)} \right| \prod_l \alpha'_l^{1-\frac{1}{2L}} \leq \frac{K^*(\dots k \dots \omega \dots \alpha)}{t^{d-s}}, \quad (11)$$

где $s = \frac{\nu+1-r+2L-1}{2} > 0$.

Но так как левая часть есть полином по t , а из факта ограниченности полинома некоторым числом N в интервале, скажем, 1—2, вы-

текает ограниченность всех его коэффициентов числами, зависящими лишь от N и от степени полинома, то отсюда легко выводим

$$|F^*(\dots k \dots \omega \dots \alpha)| \prod_l \alpha_l^{1 - \frac{1}{2l}} \leq C^*(\dots k \dots \omega \dots \alpha). \quad (12)$$

В силу доказанной оценки (5) можно в выражении $R(G)$ перейти к пределу $M \rightarrow \infty$, $I(\alpha_l) \rightarrow 1$, т. е. можно снять регуляризацию. Тогда получим

$$R(G) = \delta \left(\sum k \right) \int_0^\infty \dots dx_l \dots \times \\ \times \exp \left[-i \sum \alpha_l m_l^2 - \varepsilon \sum \alpha_l \right] f(\dots k \dots \omega \dots \alpha) \equiv \delta \left(\sum k \right) I(k), \quad (13)$$

где

$$f(\dots k \dots \omega \dots \alpha) = F(\dots k \dots \omega \dots \alpha) \exp \left[i \sum A_{ab}(\alpha) k_a k_b \right]. \quad (14)$$

Принимая для простоты, что все массы m_l положительны, легко показать, что $I(k)$ — аналитическая функция при достаточно малых k . Этот факт подтверждает возможность тейлоровских разложений, необходимых для определения операций $\Delta(\Gamma)$. Из соображений лоренц-инвариантности эти разложения приходится делать вокруг точек $\omega = 0$.

При малых k предел для $R(G)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ существует в обычном смысле. При больших k предел при $\varepsilon \rightarrow 0$ существует только в несобственном смысле.

Полученные результаты в сочетании с более глубокими соображениями причинности позволяют принять за импульсный образ произведения причинных сингулярных функций, соответствующего связанной диаграмме G , функционал $R = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} R(G)$, где предел следует понимать в несобственном смысле.

Наконец, заметим, что $\Delta(\Gamma)$ целесообразно задавать лишь с точностью до некоторых полиномов, после чего R будет зависеть от произвольных констант.

Математический институт им. В. А. Стеклова
Академии наук СССР
Институт математики Академии наук УССР

Поступило
29 X 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Н. Н. Боголюбов, О. С. Парасюк, ДАН, 100, № 1 (1954).