

ГИДРОМЕХАНИКА

А. А. ГРИБ и А. Г. РЯБИНИН

**К ВОПРОСУ О ПРИБЛИЖЕННОМ ИНТЕГРИРОВАНИИ
УРАВНЕНИЙ ПЛОСКОГО УСТАНОВИВШЕГОСЯ СВЕРХЗВУКОВОГО
ДВИЖЕНИЯ ГАЗА***

(Представлено академиком С. А. Христиановичем 14 X 1954)

Приближенному интегрированию уравнений плоского установившегося безвихревого движения газа при числах $M > 1$ посвящен ряд работ С. А. Христиановича (1, 2), Л. И. Седова (3), С. В. Фальковича (4) и др. ** В этих работах, путем соответствующей аппроксимации коэффициентов, уравнения газовой динамики сводятся к уравнению Эйлера — Дарбу. В качестве искомых функций от характеристических координат ξ, η принимают или потенциал скорости и функцию тока или потенциал Лежандра. При этом или затруднен переход к плоскости течения x, y или усложнено решение краевых задач. В настоящей заметке для чисел M , заключенных в интервале $1,15 \leq M \leq 2,35$, строится приближенное решение уравнений газодинамики непосредственно в виде $x = x(\xi, \eta)$, $y = y(\xi, \eta)$, что значительно облегчает решение основных краевых задач. Рассмотренный здесь интервал чисел M соответствует первому интервалу в аппроксимациях С. А. Христиановича (2).

1. Уравнения, определяющие плоское установившееся безвихревое изэнтропическое движение газа, имеют вид

$$\frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad \frac{W^2}{2} + \frac{a^2}{k-1} = \frac{k+1}{k-1} \frac{a_*^2}{2}, \quad (1)$$

$$\frac{P}{\rho^k} = \frac{P_0}{\rho_0^k}, \quad a^2 = \frac{kP}{\rho}, \quad W^2 = u^2 + v^2, \quad k = \frac{c_p}{c_v}.$$

Уравнения характеристик для этой системы

$$dy = \operatorname{tg}(\vartheta \pm \alpha) dx, \quad \sigma \pm \vartheta = \begin{cases} 2\xi, \\ 2\eta, \end{cases} \quad (2)$$

где ϑ — угол наклона вектора скорости к оси x ,

$$\alpha = \arcsin \frac{a}{W}, \quad \sigma = 1 - \int_1^\lambda \sqrt{\frac{\lambda^2 - 1}{1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda^2}} \frac{d\lambda}{\lambda}, \quad \lambda = \frac{W}{a_*}.$$

* Работа доложена 2 IV 1953 г. в Московском государственном университете.

** Когда настоящая заметка была уже сдана в редакцию, нам стали известны работы по тому же вопросу Г. А. Домбровского (7, 8). В (7, 8) дается приближенное решение уравнений Чаплыгина. Потенциал скоростей ϕ и функция тока ψ представляются через две произвольные функции и их первые производные. Переход в плоскость течения производится после решения краевых задач для ϕ и ψ .

Из (2) имеем

$$\frac{\partial y}{\partial \eta} = \operatorname{tg}(\vartheta + \alpha) \frac{\partial x}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial y}{\partial \xi} = \operatorname{tg}(\vartheta - \alpha) \frac{\partial x}{\partial \xi}. \quad (3)$$

Исключая y , получим

$$\frac{\partial^2 x}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\frac{\partial}{\partial \eta} [-\operatorname{tg}(\vartheta - \alpha)]}{\operatorname{tg}(\vartheta + \alpha) - \operatorname{tg}(\vartheta - \alpha)} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\frac{\partial}{\partial \xi} [\operatorname{tg}(\vartheta + \alpha)]}{\operatorname{tg}(\vartheta + \alpha) - \operatorname{tg}(\vartheta - \alpha)} \frac{\partial x}{\partial \eta} = 0. \quad (4)$$

Общее решение (4) имеет вид

$$x = \frac{\varphi(\xi) + \psi(\eta)}{f_1(\xi) + f_2(\eta)}, \quad (5)$$

если $(5, 6)$

$$\frac{\frac{\partial}{\partial \eta} [-\operatorname{tg}(\vartheta - \alpha)]}{\operatorname{tg}(\vartheta + \alpha) - \operatorname{tg}(\vartheta - \alpha)} = \frac{f'_2(\eta)}{f_1(\xi) + f_2(\eta)}; \quad \frac{\frac{\partial}{\partial \xi} [\operatorname{tg}(\vartheta + \alpha)]}{\operatorname{tg}(\vartheta + \alpha) - \operatorname{tg}(\vartheta - \alpha)} = \frac{f'_1(\xi)}{f_1(\xi) + f_2(\eta)}, \quad (6)$$

где $f_1(\xi)$ и $f_2(\eta)$ — функции, определяемые (6); $\varphi(\xi)$ и $\psi(\eta)$ — произвольные функции, определяемые из граничных условий. Зависимость

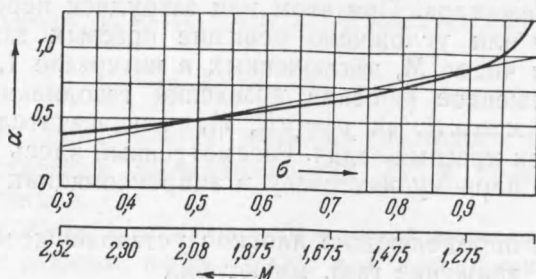


Рис. 1

$\alpha = \alpha(\sigma)$ (см. рис. 1) в интервале изменения M $1,15 \leq M \leq 2,35$ с достаточной точностью аппроксимируется прямой

$$\alpha = \sigma. \quad (7)$$

При таком выборе α условия (6) выполняются, и общее решение системы (3) имеет вид

$$x = \frac{\varphi(\xi) + \psi(\eta)}{\operatorname{tg} 2\xi + \operatorname{tg} 2\eta}; \quad y = \frac{-\operatorname{tg} 2\eta \cdot \varphi(\xi) + \operatorname{tg} 2\xi \cdot \psi(\eta)}{\operatorname{tg} 2\xi + \operatorname{tg} 2\eta}. \quad (8)$$

Аппроксимация (7) осуществляется в окрестности $M = 1,565$. Как показал С. А. Христианович ⁽¹⁾, точка $M = 1,565$ является точкой перегиба характеристик в плоскости (x, y) .

2. Решение краевых задач.

А. Задача Коши. Вдоль кривой $\eta = \omega_1(\xi)$ (или $\xi = \omega_2(\eta)$), которая пересекается прямым $\xi = \text{const}$, $\eta = \text{const}$ только в одной точке, заданы

$$x = x_1(\xi) = x_2(\eta), \quad y = y_1(\xi) = y_2(\eta). \quad (9)$$

Из этих условий находим

$$\begin{aligned} \varphi(\xi) &= \frac{[y_1(\xi) - \operatorname{tg} 2\xi \cdot x_1(\xi)] [\operatorname{tg} 2\xi + \operatorname{tg} 2\omega_1(\xi)]}{-\operatorname{tg} 2\omega_1(\xi) - \operatorname{tg} 2\xi}, \\ \psi(\eta) &= \frac{[y_2(\eta) + \operatorname{tg} 2\eta \cdot x_2(\eta)] [\operatorname{tg} 2\omega_2(\eta) + \operatorname{tg} 2\eta]}{\operatorname{tg} 2\omega_2(\eta) + \operatorname{tg} 2\eta}. \end{aligned} \quad (10)$$

Б. Задача Гурса. Рассмотрим один из вариантов задачи. Пусть на характеристике $\xi = \xi_0$, $x = x_1(\eta)$, на характеристике $\eta = \eta_0$, $x = x_2(\xi)$, причем $x_1(\eta_0) = x_2(\xi_0)$. Из условия на характеристике $\xi = \xi_0$ имеем

$$\psi(\eta) = -\varphi(\xi_0) + x_1(\eta) [\operatorname{tg} 2\eta + \operatorname{tg} 2\xi_0]. \quad (11)$$

Из условия на характеристике $\eta = \eta_0$ имеем

$$\varphi(\xi) = -\psi(\eta_0) + x_2(\xi) [\operatorname{tg} 2\eta_0 + \operatorname{tg} 2\xi]. \quad (12)$$

Из условия в точке ($\xi = \xi_0$; $\eta = \eta_0$)

$$\varphi(\xi_0) + \psi(\eta_0) = x_1(\eta_0) [\operatorname{tg} 2\xi_0 + \operatorname{tg} 2\eta_0]. \quad (13)$$

В. Движение задано вдоль характеристики (например, вдоль $\xi = \xi_0$, $x = x_1(\eta)$), пересекающей твердую стенку, уравнение которой

$$y = Y(x). \quad (14)$$

Используя (8) и (14), получим

$$\frac{-\operatorname{tg} 2\eta \cdot \varphi(\xi) + \operatorname{tg} 2\xi \cdot \psi(\eta)}{\operatorname{tg} 2\xi + \operatorname{tg} 2\eta} = Y' \left(\frac{\varphi(\xi) + \psi(\eta)}{\operatorname{tg} 2\xi + \operatorname{tg} 2\eta} \right), \quad (15)$$

где $\psi(\eta) = -\varphi(\xi_0) + x_1(\eta) [\operatorname{tg} 2\xi_0 + \operatorname{tg} 2\eta]$, $\eta = \eta(\xi)$.

Связь между η и ξ на стенке может быть установлена из условия

$$\operatorname{tg}(\xi - \eta) = Y'(x). \quad (16)$$

Постоянная $\varphi(\xi_0)$ находится из условия в точке пересечения характеристики со стенкой.

Г. Движение задано вдоль характеристики (например, вдоль $\xi = \xi_0$, $x = x_1(\eta)$, $y = y_1(\eta)$), пересекающей свободную поверхность, вдоль которой

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} \quad (17)$$

и $W = W_0 = \text{const}$ ($\sigma = \sigma_1 = \text{const}$).

Тогда вдоль свободной поверхности

$$\begin{aligned} \vartheta &= 2\xi - \sigma_1, \quad \eta = \sigma_1 - \xi, \\ u &= W_0 \cos(2\xi - \sigma_1), \quad v = W_0 \sin(2\xi - \sigma_1). \end{aligned} \quad (18)$$

Условия (17) и (18) дают

$$a_1 \varphi'(\xi) + a_2 \varphi(\xi) = a_3 \psi'(\sigma_1 - \xi) + a_4 \psi(\sigma_1 - \xi), \quad (19)$$

где a_i — известные функции от ξ и σ_1 .

Условие на характеристике $\xi = \xi_0$ дает

$$\psi(\eta) = x_1(\eta) [\operatorname{tg} 2\xi_0 + \operatorname{tg} 2\eta] - \varphi(\xi_0), \quad (20)$$

отсюда

$$\psi(\sigma_1 - \xi) = x_1(\sigma_1 - \xi) [\operatorname{tg} 2\xi_0 + \operatorname{tg} 2(\sigma_1 - \xi)] - \varphi(\xi_0). \quad (21)$$

Решая (19) при условии (21), находим $\varphi(\xi)$. Постоянные находятся из условия в точке пересечения характеристики со свободной поверхностью.

3. Как известно, существует частное решение уравнений газодинамики, не являющееся интегралом (4). Его обычно называют решением, соответствующим течению Прандтля — Мейера. При линейной аппроксимации (7) оно выглядит исключительно просто.

В заключение отметим, что для значений $M > 2,35$ зависимость $\alpha = \alpha(\sigma)$ с достаточной точностью аппроксимируется прямой

$$\alpha = 0,236\sigma + 0,284. \quad (22)$$

В этом случае при $\operatorname{tg} \vartheta \cdot \operatorname{tg} \alpha \ll 1/2$ общее решение уравнения (4) приближенно можно записать в виде:

$$x = \frac{\partial^4}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} \left[\frac{\varphi(\xi) + \psi(\eta)}{\xi + \eta + 1,204} \right]. \quad (23)$$

Ленинградский государственный университет
им. А. А. Жданова

Поступило
16 IX 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ С. А. Христианович, Тр. ЦАГИ, № 543 (1941). ² С. А. Христианович, Прикладн. матем. и мех., 11, 2 (1947). ³ Л. И. Седов, Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики, 1950. ⁴ С. В. Фалькович, Прикладн. матем. и мех., 11, 4 (1947). ⁵ С. В. Валландер, ДАН, 83, № 5 (1952). ⁶ А. А. Гриб, ДАН, 90, № 6 (1953). ⁷ Г. А. Домбровский, Сборн. статей под ред. Л. И. Седова, Теоретическая гидромеханика, № 11, в. 3 (1953). ⁸ Г. А. Домбровский, Сборн. статей под ред. Л. И. Седова, Теоретическая гидромеханика, № 11, в. 4 (1954).