

МАТЕМАТИКА

Д. Ф. ХАРАЗОВ

К ИССЛЕДОВАНИЮ ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 3 XI 1954)

1. В этой заметке мы применяем результаты, полученные нами в работах (1, 2), к исследованию граничных задач для дифференциальных уравнений вида

$$\Lambda(u) + L(u; \lambda) = f(x, y), \quad (1)$$

где $\Lambda(u)$ — произвольный линейный самосопряженный эллиптический дифференциальный оператор $2n$ -го порядка относительно двух независимых переменных x и y ; $L(u; \lambda)$ — самосопряженный дифференциальный оператор $(2n - 2)$ -го порядка вида

$$L(u; \lambda) = \sum_{i, k=0}^{n-1} \alpha_{ik}(x, y; \lambda) \frac{\partial^{i+k} u}{\partial x^i \partial y^k};$$

$$\alpha_{ik}(x, y; \lambda) = \sum_{l=0}^{m_{ik}} g_l^{(ik)}(x, y) \lambda^l \quad (i, k = 0, 1, \dots, n-1);$$

λ — комплексный параметр, а $f(x, y)$ и коэффициенты операторов $\Lambda(u)$ и $L(u; \lambda)$ — функции, непрерывные в некоторой области T плоскости x_0y , ограниченной простым замкнутым контуром Γ .

Пусть $U_i(u)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) — некоторые линейные дифференциальные операторы не выше $(2n - 1)$ -го порядка, заданные на Γ . Как известно (3), для любых функций u и v , имеющих в T непрерывные частные производные до $2(n - 1)$ -го порядка, а в $T + \Gamma$ $(2n - 3)$ -го порядка, имеет место равенство

$$\iint_T [vL(u; \lambda) - uL(v; \lambda)] d\xi d\eta = \int_{\Gamma} (M dy - N dx), \quad (2)$$

где M и N — определенные билинейные функции относительно u , v и их частных производных до $(2n - 3)$ -го порядка. Нетрудно видеть, что это условие имеет место и в том случае, когда производные $(2n - 1)$ -го порядка функций u и v имеют в T логарифмическую особенность.

В дальнейшем будем считать выполненными следующие условия:

1) существует единственное в области T решение уравнения $\Lambda(u) = p(x, y)$, удовлетворяющее на Γ условиям

$$U_i(u) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (3)$$

представимое при помощи функции Грина $H(x, y; \xi, \eta)$ оператора $\Lambda(u)$, соответствующей условиям (3), в виде

$$u(x, y) = - \iint_T H(x, y; \xi, \eta) p(\xi, \eta) d\xi d\eta;$$

2) $H(x, y; \xi, \eta)$ — симметрическое определенное ядро;

3) для любых функций u и v , имеющих в $T + \Gamma$ непрерывные частные производные до $(2n-3)$ -го порядка, удовлетворяющих на Γ условиям (3),

$$\int_{\Gamma} (M dy - N dx) = 0. \quad (4)$$

Условия 1), 2) и 3) выполняются, если, например, $\Lambda(u)$ — полигармонический оператор $2n$ -го порядка; $L(u; \lambda) = \sum_{k=0}^{n-1} p_k(\lambda) \Delta^k(u)$, где $p_k(\lambda)$ — некоторые полиномы, а $\Delta^k(u)$ — полигармонический оператор $2k$ -го порядка и условия (3) на Γ имеют вид $u = \Delta u = \dots = \Delta^{n-1}u = 0$, или $L(u; \lambda)$ — оператор не выше n -го порядка, а условия (3) на Γ имеют вид $u = du/d\nu = \dots = d^{n-1}u/d\nu^{n-1} = 0$, где ν — внутренняя нормаль контура Γ .

Рассмотрим граничную задачу:

Найти в области T решение уравнения (1), удовлетворяющее на Γ условиям (3).

Эту задачу будем называть задачей L . В силу условия 1) задача L эквивалентна интегро-дифференциальному уравнению

$$u(x, y) = \iint_T H(x, y; \xi, \eta) L(u(\xi, \eta); \lambda) d\xi d\eta - \iint_T H(x, y; \xi, \eta) f(\xi, \eta) d\xi d\eta. \quad (5)$$

2. Рассмотрим следующие интегральные уравнения:

$$v(x, y) = \iint_T K(x, y; \xi, \eta; \lambda) v(\xi, \eta) d\xi d\eta - \iint_T H(x, y; \xi, \eta) f(\xi, \eta) d\xi d\eta, \quad (6)$$

$$w(x, y) = \iint_T K(\xi, \eta; x, y; \lambda) w(\xi, \eta) d\xi d\eta - f(x, y), \quad (7)$$

где

$$K(x, y; \xi, \eta; \lambda) = L(H(x, y; \xi, \eta); \lambda) = \sum_{l=0}^m A_l(x, y; \xi, \eta) \lambda^l,$$

$$m = \max_{0 \leq i, h \leq n-1} m_{ikh};$$

$$A_l(x, y; \xi, \eta) = \sum_{i, h=0}^{n-1} h_l^{(ih)}(\xi, \eta) \frac{\partial^{i+h} H(x, y; \xi, \eta)}{\partial \xi^i \partial \eta^h},$$

$$h_l^{(ih)}(\xi, \eta) = \begin{cases} g_l^{(ih)}(\xi, \eta), & l \leq m_{ikh}; \\ 0, & l > m_{ikh} \end{cases}$$

$$(l = 0, 1, \dots, m; \quad i, k = 0, 1, \dots, n-1).$$

Ядро $K(x, y; \xi, \eta; \lambda)$ при любом λ симметризуемо справа функцией $H(x, y; \xi, \eta)$.

Лемма 1. Если $u_0(x, y)$ — решение задачи L при $\lambda = \lambda_0$, то $w_0(x, y) = -\Lambda(u_0)$ — решение уравнения (7) при том же $\lambda = \lambda_0$.

Лемма 2. Если $w_0(x, y)$ — решение уравнения (7) при $\lambda = \lambda_0$, то

$$u_0(x, y) = \iint_T H(x, y; \xi, \eta) w_0(\xi, \eta) d\xi d\eta \quad (8)$$

есть решение задачи L при том же $\lambda = \lambda_0$.

Из лемм 1 и 2 вытекает, что множества собственных значений задачи L и уравнения

$$w(x, y) = \iint_T K(\xi, \eta; x, y; \lambda) d\xi d\eta \quad (9)$$

совпадают и, более того, если $u_0(x, y)$ — собственная функция задачи L , соответствующая значению $\lambda = \lambda_0$, то $w_0(x, y) = -\Lambda(u_0)$ — собственная функция уравнения (9) при $\lambda = \lambda_0$; если же $w_0(x, y)$ — собственная функция уравнения (9), соответствующая значению $\lambda = \lambda_0$, то функция (8) — собственная функция задачи L при том же $\lambda = \lambda_0$.

3. В пространстве Лебега $L^2(T)$ рассмотрим интегральные операторы

$$Hu = \iint_T H(x, y; \xi, \eta) u(\xi, \eta) d\xi d\eta,$$

$$A_k u = \iint_T A_k(\xi, \eta; x, y) u(\xi, \eta) d\xi d\eta \quad (k = 0, 1, \dots, m)$$

и запишем уравнения (7) и (9) в виде

$$w - \sum_{k=0}^m \lambda^k A_k w = -f, \quad w - \sum_{k=0}^m \lambda^k A_k w = 0. \quad (10)$$

Легко видеть, что операторы A_k и H удовлетворяют всем требованиям, наложенным в § 1 работы (1), где в качестве пространства X надо рассматривать $L^2(T)$. На основании лемм предыдущего параграфа и результатов работы (1) при исследовании задачи L получаем следующие результаты:

Теорема 1. Если m — нечетное число и ядро $A_0(x, y; \xi, \eta)$ не имеет положительных собственных значений ≤ 1 , то существует, по крайней мере, одно вещественное собственное значение задачи L .

Теорема 2. Если m — четное число, ядро $A_0(x, y; \xi, \eta)$ не имеет положительных собственных значений ≤ 1 , а $A_m(x, y; \xi, \eta)$ имеет хотя бы одно положительное собственное значение, то существует по крайней мере одно вещественное собственное значение задачи L .

Теорема 3. Если единица не есть собственное значение ядра $A_0(x, y; \xi, \eta)$, то множество собственных значений задачи L не имеет предельных точек в конечной части плоскости λ .

Теорема 4. Если $A_0(x, y; \xi, \eta)$ не имеет положительных собственных значений ≤ 1 и все ядра $A_k(x, y; \xi, \eta)$ ($k = 2, 3, \dots, m$) имеют только положительные собственные значения, то задача L не имеет невещественных собственных значений λ , удовлетворяющих условиям $0 < \arg \lambda \leq \pi / (m - 1)$, $2\pi - \pi / (m - 1) \leq \arg \lambda < 2\pi$.

Теорема 5. Если $A_0(x, y; \xi, \eta)$ не имеет положительных собственных значений ≤ 1 и все ядра $(-1)^k A_k(x, y; \xi, \eta)$ ($k = 2, 3, \dots, m$) имеют только положительные собственные значения, то задача L не имеет невещественных собственных значений λ , удовлетворяющих условиям $\pi - \pi / (m - 1) \leq \arg \lambda < \pi$, $\pi < \arg \lambda \leq \pi + \pi / (m - 1)$.

Границы области несуществования невещественных собственных значений, полученные нами, нельзя расширить.

4. Рассмотрим частный случай задачи L , который назовем задачей L_2 , соответствующий условиям $h_l^{(ik)}(x, y) \equiv 0$ для $l = 0, 3, 4, \dots, m$; $0 \leq i, k \leq n - 1$. Тогда $A_l(x, y; \xi, \eta) \equiv 0$ для $l = 0, 3, 4, \dots, m$, и уравнения (10) примут вид

$$w - \lambda A_1 w - \lambda^2 A_2 w = -f, \quad w - \lambda A_1 w - \lambda^2 A_2 w = 0. \quad (11)$$

В силу теорем 7 и 8 работы (1) имеют место:

Теорема 6. Если $A_2(x, y; \xi, \eta)$ имеет только отрицательные собственные значения, то задача L_2 имеет, по крайней мере, одно вещественное собственное значение.

Теорема 7. Если $A_2(x, y; \xi, \eta)$ имеет только отрицательные собственные значения и все собственные значения $A_1(x, y; \xi, \eta)$ отрицательны (соответственно положительны), то все вещественные собственные значения задачи L_2 отрицательны (соответственно положительны), а вещественные части комплексных значений неположительны (соответственно неотрицательны).

Допустим теперь, что ядро $A_2(x, y; \xi, \eta)$ имеет только положительные собственные значения. В этом случае задачу L_2 назовем задачей L_2^+ . Тогда операторы A_1 , A_2 и H удовлетворяют всем требованиям, наложенным в § 1 работы (2), на основании результатов которой получаются следующие предложения:

Теорема 8. Задача L_2^+ имеет собственные значения (все вещественные в силу теоремы 4) $|\lambda_1| \leq |\lambda_2| \leq \dots \leq |\lambda_n| \leq \dots$ (бесконечное множество, если $(A_1(x, y; \xi, \eta))$ — невырожденное ядро, в этом случае $\lim_{n \rightarrow \infty} |\lambda_n| = +\infty$), которым соответствуют собственные функции $u_1(x, y), \dots, u_n(x, y), \dots$, удовлетворяющие условиям

$$\begin{aligned} & \iint_T (-\Delta u_i(x, y)) u_k(x, y) dx dy + \\ & + \lambda_i \lambda_k \iiint_T A_2(x, y; s, t) (-\Delta u_i(x, y)) u_k(s, t) dx dy ds dt = \delta_{i,k} \\ & (i, k = 1, 2, \dots). \end{aligned}$$

Отметим, что при помощи метода, указанного в работе (2), мы найдем все собственные значения задачи L_2^+ и полную систему ее собственных функций.

Теорема 9. Если λ не есть собственное значение задачи L_2^+ , то ее единственное решение почти всюду в T представимо в виде

$$u(x, y) = - \iint_T H(x, y; s, t) f(s, t) ds dt + \lambda \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f_k}{\lambda_k - \lambda} u_k(x, y), \quad (12)$$

где $f_k = \iint_T f(x, y) u_k(x, y) dx dy$ ($k = 1, 2, \dots$), а ряд справа ограниченно сходится в T .

5. Пусть теперь дополнительно $h_2^{(ik)}(x, y) \equiv 0$ для $0 \leq i, k \leq n-1$; в этом частном случае задачу L_2 будем называть задачей L_1 .

В этом случае выполняются все требования § 5 работы (2), если принять за L_B (см. (2), § 5) пространство C функций $u(x, y)$, непрерывных в T , и имеет место

Теорема 10. Если λ не есть собственное значение задачи L_1 , то ее единственное решение в области T представимо в виде (12), где ряд справа равномерно сходится в T .

Тбилисский математический институт им. А. М. Размадзе
Академии наук Груз.ССР

Поступило
5 VII 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ Д. Ф. Харазов, ДАН, 91, № 6 (1953). ² Д. Ф. Харазов, ДАН, 91, № 5 (1953). ³ G. Darboux, Leçons sur la théorie des surfaces, 2, Paris, 1915, p. 72.