

Б. И. ПЛОТКИН

К ТЕОРИИ РАЗРЕШИМЫХ ГРУПП С УСЛОВИЯМИ КОНЕЧНОСТИ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 20 XI 1954)

§ 1. Определения. Радикалом группы G будем называть подгруппу, порожденную всеми локально-нильпотентными нормальными делителями из G . Обозначается радикал через $R(G)$. Радикал $R(G)$ является характеристической локально-нильпотентной подгруппой (*). Построим в группе G возрастающий ряд характеристических подгрупп

$$E_1 = R_0 \subset R_1 \subset \dots \subset R_\alpha \subset R_{\alpha+1} \subset \dots,$$

где на предельных местах стоят объединения предыдущих членов и $R_{\alpha+1}/R_\alpha = R(G/R_\alpha)$. Если такой ряд дойдет до всей группы, то группу G назовем радикальной.

Класс радикальных групп является одним из обобщений разрешимых групп. Можно доказать, что радикальные группы занимают промежуточное положение между RN^* -группами и RN -группами. Если назовем локально-радикальной группой, обладающую локальной системой из радикальных подгрупп, то можно утверждать, что класс локально-радикальных групп в точности совпадает с классом групп, локально обладающих свойством RN^* . В настоящей заметке рассматриваются радикальные группы с условиями конечности, причем главное внимание уделяется исследованию влияния свойств радикала на свойства всей группы. Заметка примыкает к работам, указанным в списке литературы.

§ 2. Основную роль в дальнейшем играет следующая теорема:
В радикальной группе радикал содержит свой централизатор.

Доказательство этого предложения мы опускаем за недостатком места.

Пусть G — радикальная группа с нильпотентным радикалом $R(G)$. Пусть в $R(G)$ задан некоторый конечный центральный ряд

$$E = Z_0 \subset \dots \subset Z_i \subset Z_{i+1} \subset \dots \subset Z_n = R(G). \quad (*)$$

Обозначим через C_i полный прообраз в G централизатора подгруппы Z_{i+1}/Z_i в G/Z_i . Очевидно, C_i — инвариантная подгруппа, содержащая радикал. Обозначим через C пересечение всех C_i . Тогда $R(G) \subseteq C$.

Лемма. 1. $R(G) = C$.

2. Пусть $\Phi_i = G/C_i$. Тогда группа $G/R(G)$ изоморфна некоторой подгруппе прямого произведения всех Φ_i .

Доказательство. Рассмотрим группу внутренних автоморфизмов, индуцируемых элементами из G в $R(G)$. Тогда элементы из C индуцируют тождественные автоморфизмы во всех факторах ряда (*). Обозначим через $\mathfrak{Z} = \mathfrak{Z}(R(G))$ централизатор радикала. Тогда из тео-

ремы Л. Калужнина ⁽²⁾ вытекает, что $C/\mathfrak{Z}$ является нильпотентной группой. Так как ряд $(*)$ центральный в C и $\mathfrak{Z} \subset R(G)$, то, беря пересечения $\mathfrak{Z}$ с членами ряда $(*)$, мы получим в $\mathfrak{Z}$ центральный в C ряд. Отсюда C — нильпотентная группа. Но тогда $C \subset R(G)$. Используя обратное включение, имеем $C = R(G)$. Вторая часть леммы вытекает из предыдущего и из свойств подпрямых произведений.

В дальнейшем используется еще следующее предложение.

Радикальная матричная группа разрешима.

Это предложение легко выводится из работы ⁽⁴⁾.

§ 3. Отметим непосредственное следствие того факта, что в радикальной группе радикал содержит свой централизатор:

Радикальная группа тогда и только тогда конечна, когда ее радикал — конечная группа.

В работе С. Н. Черникова ⁽⁹⁾ доказано, что если в локально-нильпотентной группе все абелевы подгруппы конечны, то и сама группа конечна. Отсюда и из предыдущего получаем:

Если в радикальной группе (в частности, в RN^* -группе) все абелевы подгруппы радикала конечны, то и сама группа конечна.

Теорема 1. *Если в радикальной группе G радикал имеет конечное число образующих, то вся группа и все ее подгруппы имеют конечное число образующих. Другими словами, группа удовлетворяет условию максимальности для подгрупп.*

Доказательство. Из конечности числа образующих в локально-нильпотентной группе вытекает, что такая группа является S -группой ⁽³⁾. Следовательно, радикал $R(G)$ является S -группой. Из предыдущего параграфа мы получаем, что $G/R(G)$ — разрешимая группа. Но тогда и G — разрешимая группа. Из результатов Д. М. Смирнова ⁽⁷⁾ вытекает, что $G/\mathfrak{Z}(R(G))$ — S -группа. Так как $\mathfrak{Z}(R(G)) \subset R(G)$, то и G — S -группа, т. е. удовлетворяет условию максимальности для подгрупп.

Следствие. Из результатов А. И. Мальцева ⁽⁴⁾ вытекает, что если все абелевы подгруппы локально-нильпотентной группы удовлетворяют условию максимальности, то и вся группа обладает этим свойством. Отсюда и из теоремы 1 получаем:

Если в радикальной группе все абелевы подгруппы радикала удовлетворяют условию максимальности, то и вся группа удовлетворяет условию максимальности.

В частности, получается такое обобщение теоремы 8 из ⁽⁴⁾:

Если все абелевы подгруппы RN^* -группы удовлетворяют условию максимальности, то этим свойством обладает и вся группа.

В дальнейшем под «специальной» группой мы будем понимать произвольную группу, являющуюся расширением прямого произведения конечного числа квазициклических групп при помощи конечной группы.

Теорема 2. *Если в периодической радикальной группе G радикал является «специальной» группой, то и сама группа G является «специальной» группой.*

Доказательство. В радикале $R(G)$ можно провести конечный центральный ряд

$$E = Z_0 \subset Z_1 \subset \dots \subset Z_i \subset Z_{i+1} \subset \dots \subset Z_n = R(G),$$

где часть факторов является конечными группами, а часть — прямые произведения конечного числа квазициклических групп. Если пользоваться обозначениями леммы из § 2, то из леммы 4 ⁽⁷⁾ следует, что все Φ_i — конечные группы. Но тогда и их подпрямое произведение $G/R(G)$ будет конечной группой. Отсюда следует теорема.

Используя результаты С. Н. Черникова из теории локально-нильпотентных групп ⁽⁹⁾ и доказанную теорему, получаем такое следствие:

Если радикал периодической радикальной группы обладает одним из следующих эквивалентных свойств: 1) $R(G)$ удовлетворяет условию минимальности для подгрупп; 2) $R(G)$ удовлетворяет условию минимальности для абелевых подгрупп; 3) $R(G)$ удовлетворяет условию минимальности для нормальных делителей, то вся группа удовлетворяет условию минимальности для подгрупп.

Заметим еще, что в радикальной группе некоторая подгруппа тогда и только тогда принадлежит радикалу, когда все ее элементы являются нильэлементами ⁽⁶⁾.

Теорема 3. Если радикальная группа G удовлетворяет условию минимальности для нормальных делителей и ее радикал $R(G)$ является «специальной» группой, то и вся группа является «специальной» группой.

Для доказательства будем пользоваться обозначениями предыдущей теоремы. Покажем, что во всех случаях Φ_i — конечные группы. Если Z_{i+1}/Z_i — конечная группа, то ясно, что Φ_i — конечная группа. Пусть Z_{i+1}/Z_i — прямое произведение конечного числа квазициклических групп. Можно считать, что все эти квазициклические группы взяты по одному и тому же простому числу p . В этом случае Φ_i обладает нормальным делителем конечного индекса, коммутант которого нильпотентен ⁽⁴⁾, причем все Φ_i удовлетворяют условию минимальности для нормальных делителей. Используя результаты Бера ⁽¹⁾, нетрудно показать, что Φ_i — периодическая группа. Но тогда ⁽⁷⁾ она просто конечна. Таким образом, все Φ_i — конечные группы, причем их конечное число. Отсюда $G/R(G)$ — конечная группа.

Следствие. Радикальная группа (в частности RJ^* -группа) G тогда и только тогда удовлетворяет условию минимальности для подгрупп, когда группа G и ее радикал $R(G)$ удовлетворяют условию минимальности для нормальных делителей. Известно, что условие минимальности для нормальных делителей в радикальной группе не влечет аналогичного свойства в радикале группы ⁽⁸⁾.

§ 4. Используя результаты Н. Н. Мягковой ⁽⁵⁾, легко показать, что радикальные группы конечного специального ранга являются RJ^* -группами. Отсюда следует, что в случае групп конечного специального ранга класс RJ^* -групп совпадает с классом RN^* -групп.

Теорема 4. Пусть G — радикальная группа (в частности, RN^* -группа) конечного специального ранга. Если G удовлетворяет условию минимальности для нормальных делителей, то группа G удовлетворяет условию минимальности для подгрупп.

Доказательство. Пусть H — максимальный периодический нормальный делитель группы G . Покажем, что $H=G$. Если это не так, то радикал в G/H является нильпотентной группой без кручения конечного ранга. Используя ⁽⁷⁾, мы получаем, что в G/H имеется нормальный делитель конечного индекса, коммутант которого содержится в радикале. Из условия минимальности для нормальных делителей в G/H и из результатов Бера ⁽¹⁾ можно получить, что G/H — периодическая группа. Отсюда $H=G$.

Остальная часть доказательства может быть получена из рассмотрения структуры периодической RJ^* -группы конечного специального ранга ⁽⁵⁾.

Следствие. RJ -группа конечного специального ранга тогда и только тогда удовлетворяет условию минимальности для нормальных делителей, когда она удовлетворяет условию минимальности для подгрупп.

Для доказательства достаточно заметить, что RJ -группа с условием минимальности для нормальных делителей является RJ^* -группой и, следовательно, радикальной группой.

Доказанное следствие является обобщением результата В. С. Чарина⁽⁸⁾, в котором вместо KJ -групп рассматривается более узкий класс локально-разрешимых групп.

Свердловский горный институт
им. В. В. Вахрушева

Поступило
29 IX 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ R. Baer, Duke Math. J., 16, 1 (1949). ² Л. Калужнин, С. Р., 234, No. 24, 2067 (1950). ³ А. Г. Курош, Теория групп, М., 1953. ⁴ А. И. Мальцев, Матем. сборн., 28 (70): 3, 567 (1951). ⁵ Н. Н. Мягкова, Изв. АН СССР, сер. матем., 13, 495 (1949). ⁶ Б. И. Плоткин, Усп. матем. наук, 9, в. 3 (1954). ⁷ Д. М. Смирнов, Матем. сборн., 32, (74): 1, 365 (1953). ⁸ В. С. Чарин, Матем. сборн., 33 (75): 1, 27 (1953). ⁹ С. Н. Черников, Матем. сборн., 27 (69): 2, 185 (1950). ¹⁰ О. Ю. Шмидт, Матем. сборн., 17 (59), 145 (1945).