Доклады Академии наук СССР
1955. Том 100, № 3

МАТЕМАТИКА

М. Г. КРЕЙН

ОБ ОДНОМ НОВОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО И ВТОРОГО РОДА

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 20 XI 1954)

Здесь будет изложен новый метод решения интегральных уравнений, подсказанный теорией спектральных функций одномерных краевых задач.

1. Пусть $K(x, s)$ $(0 \leqslant x, s < A)$ — некоторая измеримая функция, и пусть при любом a $(0 < a < A)$ к интегральному уравнению

$$\int_0^a K(x, s)\varphi(s)\,ds - \mu\varphi(x) = f(x) \quad (0 \leqslant x \leqslant a), \tag{1}$$

рассматриваемому в классе непрерывных функций $(f, \varphi \in C(0, a))$, применима обычная теория Фредгольма.

Предполагая, что фиксируемое значение параметра μ $(\neq 0)$ таково, что для любого a $(0 < a < A)$ уравнение (1) при $f \equiv 0$ не имеет решений, отличных от тривиального, обозначим через $\Gamma_a(x, s)$ $(0 \leqslant x, s \leqslant a)$ фредгольмовскую резольвенту уравнения (1), так что

$$\Gamma_a(x, s) = K(x, s) + \frac{1}{\mu}\int_0^a K(x, r)\Gamma_a(r, s)\,dr \quad (0 \leqslant x, s \leqslant a). \tag{2}$$

Обозначим далее через $g(x, a)$ решение уравнения (1) для $f \equiv 1$; таким образом,

$$g(x, a) = -\frac{1}{\mu}\left(1 + \int_0^a \Gamma_a(x, s)\,ds\right). \tag{3}$$

Путем почленного дифференцирования (2) по a легко получается (ср. [3]):

$$\partial\Gamma_a(x, s)/\partial a = \Gamma_a(x, a)\Gamma_a(a, s). \tag{4}$$

Отсюда находим:

$$\partial g(x, a)/\partial a = g(a, a)\Gamma_a(x, a). \tag{5}$$

Положим

$$M(0) = 0, \quad M(a) = \int_0^a g(s, a)\,ds \quad (0 < a < A) \tag{6}$$

и обозначим через $g^*(x, a)$ функцию, в которую превращается функция $g(x, a)$ при замене ядра $K(x, s)$ транспонированным ядром $K^*(x, s) \equiv K(s, x)$. Пользуясь (5), получим:

$$M'(a) = -\mu g(a, a)\, g^*(a, a) \quad (0 < a < A). \tag{7}$$

В предположении, что $M'(a) \neq 0$ $(0 < a < A)$, при помощи соотношений (4), (5) и (7) непосредственно проверяется справедливость следующего правила.

Правило **A**. *Для любого* $f \in C(0, a)$ *решение* $\varphi \in C(0, a)$ *уравнения* (1) *может быть получено по формуле:*

$$\varphi(x) = \frac{1}{M'(a)}\left[\frac{d}{da}\int_0^a g^*(s, a) f(s)\, ds\right] g(x, a) -$$

$$-\int_x^a g(x, u)\, \frac{d}{du}\left(\frac{1}{M'(u)}\, \frac{d}{du}\int_0^u g^*(s, u)\, f(s)\, ds\right) du. \tag{I}$$

Заметим, что при вычислениях второй интеграл удобно иногда писать в преобразованном виде, получающемся на основании формулы:

$$\frac{d}{du}\left(\frac{1}{M'(u)}\, \frac{dI}{du}\right) = \frac{1}{M}\, \frac{d}{du}\left(\frac{M^2}{M'}\, \frac{d}{du}\left(\frac{I}{u}\right)\right).$$

Очевидно также, что если ядро R симметрично, то $g^*(x, u) \equiv g(x, u)$.

2. Пусть $H(t)$ $(0 \leqslant t < 2A)$ — измеримая функция, суммируемая в каждом интервале $(0, 2a)$, где $0 < a < A$. Рассмотрим интегральное уравнение

$$\int_{-a}^{a} H(|x - s|)\, \varphi(s)\, ds - \mu\varphi(x) = f(x) \quad (-a \leqslant x \leqslant a). \tag{8}$$

Правило **B**. *Если* μ $(\neq 0)$ *таково, что при любом* a $(0 < a < A)$ *уравнение*

$$\int_{-a}^{a} H(|x - s|)\, g(s, a)\, ds - \mu g(x, a) = 1 \quad (-a \leqslant x \leqslant a) \tag{9}$$

имеет единственное решение $g(x, a)$ $(-a \leqslant x \leqslant a)$, *то для любого* $f \in C(-a, a)$ *решение* φ *уравнения* (8) *может быть получено по формуле:*

$$\varphi(x) = \frac{1}{2M'(a)}\left[\frac{d}{da}\int_{-a}^{a} g(s, a) f(s) ds\right] g(x, a) -$$

$$-\frac{1}{2}\int_x^a g(x, u)\, \frac{d}{du}\left(\frac{1}{M'(u)}\, \frac{d}{du}\int_{-u}^{u} g(s, u) f(s) ds\right) du -$$

$$-\frac{1}{2}\, \frac{d}{dx}\int_x^a \frac{g(x, u)}{M'(u)}\left(\int_{-u}^{u} g(s, u)\, df(s)\right) du. \tag{II}$$

В п. 3 при некоторых дополнительных условиях относительно $H(x)$ правило **B** будет распространено также на случай $\mu = 0$, при этом от решения $g(x, a)$ вместо непрерывности будет требоваться суммируемость в $(-a, a)$. Во всех случаях в формуле (II) $M'(a)$ будет означать производную от функции $M(a)$, определяемой по правилу (6).

При $\mu \neq 0$, удовлетворяющем условию правила **B**, будем иметь $M'(a) = -\mu g^2(a, a)$, и, как это следует (см. [3]) из приводимых ниже соотношений (13), всегда будет $M'(a) \neq 0$ $(0 \leqslant a < A)$.

В пояснение правила **В** заметим, что $g(x, a)$, будучи, очевидно, четной функцией, будет также (для $x \in (0, a)$) решением уравнения (1) при $f \equiv 1$ и

$$K(x, s) = H(|x - s|) + H(x + s) \quad (0 \leqslant x, s < A). \tag{10}$$

Далее, если f — четная функция, то в силу четности функций f, g последний член в правой части формулы (II) пропадает, и для $x \in (0, a)$ эта формула ничем не будет отличаться от формулы (I). Так как, с другой стороны, для четного f и функция φ будет четной, а следовательно, будет также решением уравнения (1) с тем же f и ядром K, определенным в (10), то тем самым справедливость формулы (II) для этого случая установлена. Так как каждая функция $f \in C(-a, a)$ представима в виде суммы четной и нечетной функций из $C(-a, a)$, то остается проверить справедливость формулы (II) для нечетной функции $f \in C(-a, a)$. Заметим, что для нечетной функции f в правой части формулы (II) первые два члена пропадают и остается лишь один третий член.

Уравнение (9) подстановкой

$$\psi(x) = \varphi(x - a), \quad h(x) = f(x - a) \quad (0 \leqslant x \leqslant 2a)$$

приводится к виду:

$$\int_0^b H(|x - s|)\,\psi(s)\,ds - \mu\psi(x) = h(x) \quad (0 \leqslant x \leqslant b = 2a). \tag{11}$$

Если обозначить через $R_b(x, s)$ $(0 \leqslant x, s \leqslant b)$ резольвенту этого уравнения, то решение уравнения (11) можно будет записать в виде:

$$\varphi(x) = -\frac{1}{\mu}\left(f(x) + \int_{-a}^{a} R_{2a}(x + a, s + a) f(s)\,ds\right) \quad (-a \leqslant x \leqslant a). \tag{12}$$

Имеют место соотношения:

$$\begin{aligned} \partial g(x, a)/\partial x &= g(a, a)\,[R_{2a}(a + x, 0) - R_{2a}(a - x, 0)] \\ \partial g(x, a)/\partial a &= g(a, a)\,[R_{2a}(a + x, 0) + R_{2a}(a - x, 0)], \end{aligned} \tag{13}$$

уже отмечавшиеся ([3]) для случая $\mu = -1$.

Используя эти соотношения вместе с соотношением (4) для $R_b(x, s)$, нетрудно убедиться, что для нечетной функции f формула (11) эквивалентна формуле (12).

В качестве примера на применение формулы (II) приведем интегральное уравнение

$$-\varphi(x) + \frac{\rho}{2}\int_{-a}^{a} J_1(\rho\,|x - s|)\,\varphi(s)\,ds = f(x) \quad (-a \leqslant x \leqslant a),$$

где ρ $(\neq 0)$ — какое-либо комплексное число, а $J_1(x)$ — цилиндрическая функция.

Можно показать, что при любом $a > 0$ это уравнение $f \equiv 1$ имеет единственное решение $g(x, a) = -J_0(\rho\sqrt{a^2 - x^2})$. Следовательно, для любого $f \in C(0, a)$ решение этого уравнения получается по формуле (II) с этим g и $M'(a) = -1$.

3. Может случиться, что уравнение (9) и при $\mu = 0$ имеет при любом a $(0 < a < A)$ единственное интегрируемое решение $g(x, a)$, для которого функция $M(a)$ $(0 < a < A)$ обладает отличной от нуля и непрерывно дифференцируемой производной. В этом случае естественно предположить, что для достаточно гладких функций $f(x)$ правило **В** решения уравнения (8) сохраняет силу и при $\mu = 0$.

Оказывается, что, действительно, *если функция* $H(x)$ *имеет вид*

$$H(x) = F(x) + \begin{cases} c \ln x, \\ cx^{-h}, \end{cases} \quad (0 < x < 2A)$$

где $F(x) \in C_1(0, A)$, $c \neq 0$, $0 < h < 1$, *то и при* $\mu = 0$ *правило* **В** *сохраняет силу для функций* $f \in C_2(0, A)$ $(0 < a < A)$, *доставляя единственное интегрируемое решение* φ *уравнения:*

$$\int_{-a}^{a} H(|x - s|)\varphi(s)\,ds = f(x) \quad (-a \leqslant x \leqslant a). \tag{14}$$

Поясним, что через $C_1(0, A)$ здесь обозначается совокупность всех непрерывных функций $F(x)$ $(0 \leqslant x < A)$, имеющих абсолютно непрерывную производную $F'(x)$, а через $C_2(0, a)$ — совокупность всех дважды непрерывно дифференцируемых функций $f(x)$ $(0 \leqslant x \leqslant a)$. Заметим, что теперь (при $\mu = 0$) формула (7) потеряла смысл.

По правилу **В** можно, например, решить уравнение (14) для тех случаев, когда $H(x)$ является одной из следующих функций:

$$1)\ \ln(A/2x); \quad 2)\ \ln\left(\sin\frac{A}{2}\Big|2\sin\frac{x}{2}\right); \quad 3)\ \ln\left(\operatorname{sh}\frac{A}{2}\Big|2\operatorname{sh}\frac{x}{2}\right);$$

$$4)\ \ln\operatorname{cth}\frac{x}{4}; \quad 5)\ x^{-h}\ (0 < h < 1).$$

Соответствующие выражения для функций $g(x, a)$ и $M(a)$ приведены в статье ([2]). Со случаями 1) и 2) уравнения (14) приходится иметь дело в контактной задаче теории упругости ([4]), и для этих случаев решение уравнения (14) было известно. Но и для этих уравнений наше решение является новым по своей аналитической форме, имея то преимущество перед ранее известными, что в нем отсутствуют сингулярные интегралы, берущиеся с смысле Коши.

Следует указать, что для случая ядра $H(|x - s|) = -\ln|x - s|$ решение уравнения (14), свободное от сингулярных интегралов, повидимому, впервые нашел Н. А. Ростовцев ([5]). Однако его решение правильно лишь для четной функции f. Для нечетной f найденное им решение имеет особенность в нуле, в силу которой оно неинтегрируемо по абсолютной величине. Если же допускать решения такого рода, понимая интеграл, стоящий в (14), в смысле главного значения, то решение φ уравнения (14) вообще не будет однозначно определяться. Этот недосмотр повлек за собой погрешности в последующей работе того же автора ([6])*, которая интересна тем, что в ней показано, что уравнение (1) может быть преобразовано в уравнение вольтерровского типа, коль скоро известна функция g.

Если $A = \infty$, то при определенных условиях в уравнениях (1), (8) и (11) можно перейти к пределу при $a \to \infty$ и $b \to \infty$. За недостатком места мы не можем остановиться на получающихся таким образом правилах решения линейных интегральных уравнений первого и второго рода в бесконечном или полубесконечном интервале.

Одесский гидротехнический
институт

Поступило
26 X 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] М. Г. Крейн, ДАН, **94**, № 1 (1954). [2] М. Г. Крейн, ДАН, **94**, № 6 (1954). [3] М. Г. Крейн, ДАН, **97**, № 1 (1954). [4] И. Я. Штаерман, Контактная задача теории упругости, 1949. [5] Н. А. Ростовцев, Прикладн. матем. и мех., **17**, в. 1 (1953). [6] Н. А. Ростовцев, Украинск. матем. журн., **6**, № 3 (1954).

* В статье ([6]) Н. А. Ростовцев рассматривает случай ядра $H(|x-s|) = \ln\left|\sin\frac{x-s}{2}\right|$ и другие, которые он сводит к случаю ядра $\ln|x-s|$ (точнее, ядра $\ln|1 - x/s|$).