Доклады Академии наук СССР
1955. Том 100, № 3

МАТЕМАТИКА

М. И. ВИШИК

СМЕШАННЫЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ, СОДЕРЖАЩИХ ВТОРУЮ ПРОИЗВОДНУЮ ПО ВРЕМЕНИ, И ПРИБЛИЖЕННЫЙ МЕТОД ИХ РЕШЕНИЯ

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 25 X 1954)

1. Существование и единственность решения задачи (I). Пусть в цилиндрической области $Q = D \times (0 < t < l)$, где D — ограниченная область в $E^{(n)}$ с границей Г, дана система дифференциальных уравнений

$$Lu \equiv A_{m'}\left(x,\ t,\ \frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + B_{r'}\left(x,\ t,\ \frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{\partial u}{\partial t} + C_{s'}\left(x,\ t,\ \frac{\partial}{\partial x}\right) u = h(x,t), \quad (1)$$

где A, B, C — дифференциальные операторы с ограниченными коэффициентами порядков m', r', s', $u = (u_1, \ldots, u_N)$, $h = (h_1, \ldots, h_N)$, $x = (x_1, \ldots, x_n)$.

а) Случай $m' = 2m$, $r' \leqslant m'$, $s' \leqslant m'$. В этом случае предполагаем, что A_{2m} — сильно эллиптический положительный оператор (с. э. п.) ([2-4]). Конкретные уравнения такого типа рассмотрены в важной работе С. Л. Соболева ([1]).

Смешанная краевая задача (задача (I)) для системы (1) в цилиндре Q состоит в нахождении ее решения $u(x, t)$, которое при $t = 0$ удовлетворяет начальным условиям $u|_{t=0} = \varphi(x)$, $\partial u/\partial t|_{t=0} = \psi(x)$, а на боковой поверхности $Б = \Gamma \times (0 < t < l)$ $u(x, t)$ (или $\partial^2 u(x, t)/\partial t^2$) принимает вместе со своими нормальными производными до порядка $m - 1$ заданные на $Б$ значения.

Мы скажем, что функция $u(x, t)$ является решением (обобщенным) задачи (I) при однородных (нулевых) граничных условиях на $Б$, если $G_m u_{tt}' \in R_0^{(m)}$, $G_r u_t' \in R_0^{(r)}$, $G_s u \in R_0^{(s)}$, где $r = \left[\frac{r'+1}{2}\right]$, $s = \left[\frac{s'+1}{2}\right]$, и для любой функции $v(x, t)$, для которой $G_m v \in R_0^{(m)}$, $G_r v \in R_0^{(r)}$, $G_s v \in R_0^{(s)}$ (мы придерживаемся обозначений, введенных в ([2-4])),

$$\left\{\widetilde{A} G_m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, G_m v\right\}_m + \left\{\widetilde{B} G_r \frac{\partial u}{\partial t}, G_r v\right\}_r + \{\widetilde{C} G_s u, G_s v\}_s = [h, v], \quad (2)$$

где $\widetilde{A} = G_m^{*-1} A_{2m} G_m^{-1}$, $\widetilde{B} = G_r^{*-1} B_{r'} G_r^{-1}$, $\widetilde{C} = G_s^{*-1} C_{s'} G_s^{-1}$.

Теорема 1. *Если $m' = 2m$, $r' \leqslant 2m$, $s' \leqslant 2m$, A_{2m} — общий с. э. п. оператор, $B_{r'}$ и $C_{s'}$ — произвольные дифференциальные операторы порядков r' и s', то задача* (I) *имеет, и притом единственное, решение для любой правой части $h(x, t) \in \mathfrak{L}_{p,2}(Q)$, где $p = p(m)$* ([3]), *и при любых начальных условиях $\varphi(x) \in W_2^{(s)}(0)$, $\psi(x) \in W_2^{(r)}(0)$* ([5]).

Решение задачи $u(x, t)$ непрерывно зависит от h, φ, ψ, измеряемых в соответствующих метриках: $(\| G_m u_{tt}' \|_m + \| G_r u_t' \|_r + \| G_s u \|_s) \leqslant K(\| h \|_{p,2} + \| G_s \varphi \|_s + \| G_r \psi \|_r)$.

б) Случай $r' = 2r > m' = 2m$, $r' \geqslant s'$. Задача (I) ставится в основном так же, как раньше, с той лишь разницей, что в этом случае на $Б$ задаются значения u (или u_t) и ее нормальных производных до порядка $r-1$. Решение (обобщенное) $u(x, t)$ задачи (I) понимается в смысле, аналогичном (2).

Теорема 2. *Пусть* $m' = 2m$, $r' = 2r > 2m$, $s' \leqslant 2r$; A_{2m} — *самосопряженный с. э. п. оператор*; B_{2r} *допускает представление* $B_{2r} = B' + B''$, *где* B' — *с. э. п. оператор,* B'' — *любой оператор порядка* $\leqslant 2m$; $C_{s'}$ — *произвольный оператор порядка* $\leqslant 2r$. *Если коэффициенты операторов* A, B', B'' *имеют ограниченную в* Q *производную по* t, *то задача* (I) *с нулевыми условиями на* $Б$ *имеет, и притом единственное, решение* $u(x, t)$ *при любой правой части* $h(x, t) \in \mathcal{L}_{p',2}(Q)$, $p' = p(r)$, *и при любых начальных условиях* $\varphi(x) \in \in W_2^{(s)}(0)$, $\psi(x) \in W_2^{(m)}(0)$. *Решение* $u(x, t)$ *непрерывно зависит от* h, φ, ψ.

в) Случай $s' = 2s > r'$, $s' > m' = 2m$. В задаче (I), кроме начальных условий, задаются на $Б$ граничные условия для $u(x, t)$ и ее производных до порядка $s-1$. Решение задачи (I) понимается в обобщенном смысле, аналогичном (2).

Теорема 3. *Пусть* $s' = 2s > r'$, $2s > m' = 2m$; A_{2n} — *самосопряженный с. э. п. оператор;* $B = B' + iB''$, *где* B' — *с. э. оператор порядка* $2k$, *полуограниченный снизу, а* B'' — *любой самосопряженный оператор порядка* $\leqslant s + \varkappa$, $\varkappa = \max(m, k)$; $C = C' + C''$, *где* C' — *самосопряженный с. э. п. оператор порядка* $2s$, C'' — *любой дифференциальный оператор порядка* $\leqslant s + \varkappa$. *Если коэффициенты операторов* A, B', B'', C', C'' *имеют в* Q *ограниченную производную по* t, *то задача* (I) *при нулевых граничных условиях на* $Б$ *имеет, и притом единственное, решение* $u(x, t)$ *при любых* $h(x, t) \in \mathcal{L}_{\overline{p},2}(Q)$, *где* $\overline{p} = p(s)$, $\varphi(x) \in W_2^{(s)}(0)$, $\psi(x) \in W_2^{(\varkappa)}(0)$. *Решение* $u(x, t)$ *непрерывно зависит от* h, φ, ψ.

2. Дифференциальные свойства решений. Для краткости мы приведем здесь теоремы о дифференциальных свойствах решений в случае нулевых начальных условий (см. также [6-8]).

Теорема 4. *Пусть коэффициенты системы* (1) *имеют в* Q *ограниченные производные по* t *до порядка* ρ, $\varphi = 0$, $\psi = 0$, *а правая часть* $h(x, t)$ *имеет такие же производные, принадлежащие соответствующим* $\mathcal{L}_{p,2}(Q)$, *и* $h(x, 0) = \ldots = h_t^{(\rho-1)}(x, 0) = 0$. *Тогда*: А) *в случае выполнения условий теоремы* 1 *решение* $u(x, t)$ *задачи* (I) *имеет в* Q *производные по* t (*обобщенные*) *до порядка* $\rho + 2$, *причем справедлива оценка*

$$\left(\left\|\frac{\partial^{\rho+2}u}{\partial t^{\rho+2}}\right\| + \left\|G_m \frac{\partial^{\rho+2}u}{\partial t^{\rho+2}}\right\|_n\right) \leqslant K(\|h_t^{(\rho)}\|_{p,2} + \ldots + \|h\|_{p,2});$$

Б) *в случае выполнения условий теоремы* 3 (*соотв.* 2) *решение* $u(x, t)$ *имеет в* Q *производные по* t *до порядка* $\rho + 1$, *причем в случае условий теоремы* 3 *имеет место оценка:*

$$\left(\left\|G_\varkappa \frac{\partial^{\rho+1}u}{\partial t^{\rho+1}}\right\|_\varkappa + \left\|G_s \frac{\partial^\rho u}{\partial t^\rho}\right\|_s\right) \leqslant K(\|h_t^{(\rho)}\|_{\overline{p},2} + \ldots + \|h\|_{\overline{p},2})$$

(*см. также* [6]). Аналогичная оценка имеет место в случае выполнения условий теоремы 2*.

Пусть Q^δ — множество точек цилиндра Q, отстоящих от $Б$ на расстояние $> \delta$. Под обобщенным решением системы (1) внутри

* В теоремах 1—4 предполагается еще существование некоторых производных по x-м для некоторых коэффициентов (1). Для краткости мы этих условий не формулируем.

Q мы будем понимать в случае а), соотв. б), соотв. в), такую функцию $w(x, t)$, для которой выполнены соотношения, аналогичные (2), для любых функций v, обращающихся в нуль вблизи $Б$. При этом предполагается, что $w(x, t)$ имеет в любом Q^δ конечные по норме, взятой по Q^δ, градиенты, входящие в эти соотношения (вблизи $Б$ $w(x, t)$ может вести себя как угодно).

Теорема 5. *Пусть $w(x, t)$ — обобщенное решение системы* (1).

I. *В случае выполнения условий на операторы A, B, C, сформулированных в теореме* 1, *допустим, что для любого $\delta > 0$* $G_m \frac{\partial^\alpha w}{\partial t^\alpha} \in R^{(m)}(Q^\delta)$ $(\alpha = 0, 1, \ldots, \rho + 2)$, $w \in \mathcal{L}_2(Q^\delta)$ *и* (*для краткости*) $w(x, 0) = \ldots = w_t^{(\rho+1)}(x, 0) = 0$. *Тогда, если коэффициенты системы* (1) *имеют ограниченные производные по t в Q^δ до порядка ρ и каждая из этих производных имеет производные по x-м до порядка σ, $D^\beta h_t^{(\gamma)}(x, t) \in \mathcal{L}_2(Q^\delta)$ $(\gamma = 1, \ldots, \rho)$ D^β — любой оператор частной производной по x-м порядка β, $\beta = 1, \ldots, \tau$, $\tau = \max[0, \sigma - m]$, то решение $w(x, t)$ допускает все обобщенные производные, входящие в левую часть имеющего место неравенства:*

$$\sum_{\alpha=0}^{\rho+2} \sum_{\omega=1}^{\sigma} \left(\left\| G_m D^\omega \frac{\partial^\alpha w}{\partial t^\alpha} \right\|'_m + \left\| D^\omega \frac{\partial^\alpha w}{\partial t^\alpha} \right\|' \right) \leqslant$$

$$\leqslant K \left(\sum_{\beta=0}^{\tau} \sum_{\gamma=0}^{\rho} \| D^\beta h_t^{(\gamma)} \|'' + \sum_{\alpha=0}^{\rho+2} \left\| G_m \frac{\partial^\alpha w}{\partial t^\alpha} \right\|'' + \| w \|'' \right),$$

где $\| \|'$ означает норму, взятую по области $Q^{\delta'}$, а $\| \|''$ — по $Q^{\delta''}$, где $0 < \delta'' < \delta'$; K зависит лишь от δ', δ'' и коэффициентов (1).

II. *В случае выполнения условий на операторы A, B', B'', C', C'', сформулированных в теореме* 3, *допустим, что для любого $\delta > 0$* $G_m \frac{\partial^\alpha w}{\partial t^\alpha} \in R^{(m)}(Q^\delta)$ $(\alpha = 1, \ldots, \rho + 1)$, $G_r \frac{\partial^\alpha w}{\partial t^\alpha} \in R^{(r)}(Q^\delta)$ $(\alpha = 0, 1, \ldots, \rho)$, $G_s \frac{\partial^\alpha w}{\partial t^\alpha} \in R^{(s)}(Q^\delta)$ $(\alpha = 0, 1, \ldots, \rho - 1)$ *и* (*для краткости*) $w(x, 0) = \ldots = w_t^{(\rho)}(x, 0) = 0$. *Тогда, если коэффициенты системы* (1) *имеют в любом Q^δ ограниченные частные производные по x-м и по t до порядка ρ, $D^\beta h_t^{(\gamma)} \in \mathcal{L}_2(Q^\delta)$ $(\gamma = 0, 1, \ldots, \rho - 1;$ $\beta = 0, 1, \ldots, \tau$ $(\tau = \max[0, \rho - s]))$, причем $\beta + \gamma \leqslant \rho$, то решение $w(x, t)$ в Q^δ допускает все обобщенные производные, входящие в левую часть имеющего место неравенства:*

$$\sum_{\alpha+\omega \leqslant \rho+1} \left\| G_\varkappa D^\omega \frac{\partial^\alpha w}{\partial t^\alpha} \right\|' + \sum_{\alpha+\omega \leqslant \rho} \left\| G_s D^\omega \frac{\partial^\alpha w}{\partial t^\alpha} \right\|' \leqslant$$

$$\leqslant C \Big(\sum_{\beta+\gamma \leqslant \rho} \| D^\beta h_t^{(\gamma)} \|'' + \sum_{\alpha=0}^{\rho+1} \left\| G_m \frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} \right\|'' +$$

$$+ \sum_{\alpha=0}^{\rho} \left\| G_r \frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} \right\|'' + \sum_{\alpha=0}^{\rho-1} \left\| G_s \frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} \right\|'' + \| u \|'' \Big),$$

где $\omega \geqslant 1$; $\beta = 0, 1, \ldots, \tau$; $\gamma = 1, \ldots, \rho - 1$; $\varkappa = \max(m, k)$.

Совершенно аналогичное предложение и оценка имеют место в случае выполнения условий на операторы A, B, C, сформулированных в теореме 2.

Аналогичная теорема имеет место при неоднородных начальных условиях и для систем уравнений, рассмотренных нами в ([2],[3]). Из теоремы 5 вытекает, что если обобщенное решение $w(x, t)$ системы (1) имеет производные по t до определенного порядка, то оно обязательно имеет также производные по x-м и по t (до соответствующего порядка) с ограниченными нормами по Q^δ, $\delta > 0$.

Пользуясь теоремами 4, 5 и теоремой вложения С. Л. Соболева ([5]), легко сформулировать условия на коэффициенты и правую часть, при которых решение $u(x, t)$ будет иметь в Q все непрерывные производные, входящие в (1).

3. Аналог метода Галеркина. Пусть $\{u_l(x)\}$ — полная система функций в пространстве $W_2^{(m)}(0)$ (случай а)), или $W_2^{(r)}(0)$ (случай б)), или $W_2^{(s)}(0)$ (случай в)). Приближенное решение задачи (I) ищется в виде суммы: $\tilde{u}_n(x, t) = \sum_{i=1}^{n} c_l(t)\, u_l(x)$, причем неизвестные коэффициенты $c_l(t)$ определяются как решения следующей системы обыкновенных уравнений:

$$(L\tilde{u}_n(x, t),\ u_i(x)) = (h(x, t),\ u_l(x)), \tag{3}$$

а начальные условия $c_l(0) = c_l^{(n)}$, $c_l'(0) = c_l^{(n)\prime}$ выбираются таким образом, чтобы функции $\varphi_n(x) = \sum_{i=1}^{n} c_l^{(n)} u_l(x)$ и $\psi_n(x) = \sum_{i=1}^{n} c_l^{(n)\prime} u_l(x)$ сходились в соответствующей метрике к $\varphi(x)$ и $\psi(x)$. Если $\varphi(x) = 0$ и $\psi(x) = 0$, то достаточно взять $\varphi_n = \psi_n = 0$.

Теорема 6. *Если выполнены условия теоремы* 1 *и (для краткости)* $\varphi = 0$, $\psi = 0$, *то приближенные решения* $\tilde{u}_n(x, t)$ *в сильном смысле в метрике* $R_0^{(m)}(Q)$ *сходятся к точному решению* $u(x, t)$: $G_m\tilde{u}_n(x, t) \Rightarrow G_m u(x, t)$, $G_m(\tilde{u}_n)_t' \Rightarrow G_m u_t'$, $G_m(\tilde{u}_n)_{tt}'' \Rightarrow G_m u_{tt}''$.

Если выполнены условия теоремы 2 *или* 3, *причем коэффициенты* (1) *имеют ограниченную первую производную по* t, *а коэффициенты оператора* A *имеют также вторую производную по* t, $h(x, t)$ *и* $h_t'(x, t) \in \mathcal{L}_2(Q)$, *то в случае выполнения условий теоремы* 2 *приближенные решения* $\tilde{u}_n(x, t)$ *сходятся в сильном смысле в метрике* $R^{(r)}(0)$ *к точному решению* $u(x, t)$: $G_r\tilde{u}_n \Rightarrow G_r u$, $G_r(\tilde{u}_n)_t' \Rightarrow G_r u_t'$, *а в случае выполнения условий теоремы* 3: $G_s\tilde{u}_n \Rightarrow G_s u$, $G_\varkappa(\tilde{u}_n)_t' \Rightarrow G_\varkappa u_t'$.

Сильная сходимость приведенного приближенного метода установлена также для всех рассмотренных нами ранее систем ([2],[3]). Для доказательства существования решения $u(x, t)$ и для приближенного решения смешанных задач для системы (1) с неоднородными граничными условиями на Γ доказано, что может быть применен метод прямых разложений ([3],[9]) и аналог метода Галеркина.

4. Аналогичные теоремы установлены и для операторных уравнений вида (1).

Московский энергетический институт
им. В. М. Молотова

Поступило
18 X 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] С. Л. Соболев, Изв. АН СССР, **18**, № 1 (1954). [2] М. И. Вишик, ДАН, **97**, № 2 (1954). [3] М. И. Вишик, ДАН, **99**, № 2 (1954). [4] М. И. Вишик, Матем. сборн., **29** (71) : 3 (1951). [5] С. Л. Соболев, Некоторые применения функционального анализа в математической физике, 1950. [6] О. А. Ладыженская, Смешанная задача для гиперболического уравнения, М.—Л., 1953. [7] K. O. Friedrichs, Comm. Pure, Appl. Math., **6**, № 3 (1953). [8] О. А. Ладыженская, ДАН, **97**, № 3 (1954). [9] М. И. Вишик, Матем. сборн., **25**, (67), 189 (1949).