Доклады Академии наук СССР
1955. Том 100, № 3

МАТЕМАТИКА

В. А. АНДРУНАКИЕВИЧ

КОЛЬЦА, ОБЛАДАЮЩИЕ МИНИМАЛЬНЫМИ ДВУСТОРОННИМИ ИДЕАЛАМИ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 20 XI 1954)

В настоящей работе рассматриваются ассоциативные кольца, содержащие минимальные идеалы*. Основным результатом является теорема, что кольцо $\mathfrak{A}$ представимо в виде прямой суммы $\mathfrak{A} = E + E^*$, где E — сумма всех минимальных идеалов с единицей кольца $\mathfrak{A}$, а E^* — аннулятор** идеала E, тогда и только тогда, если каждый главный идеал кольца $\mathfrak{A}$ содержит не более конечного числа минимальных идеалов с единицей. Из этой теоремы можно получить результат, ранее доказанный автором ([1], теорема 6), а следовательно, и теорему М. Холла ([7], теорема 2.2).

Если a — произвольный элемент ассоциативного кольца $\mathfrak{A}$, то через $F(a)$ будем обозначать отмеченный*** идеал $\{ax - x + ya - y + \Sigma x_i a y_i - \Sigma x_i y_i\}$, где x, y, x_i, y_i пробегают кольцо $\mathfrak{A}$. Как известно ([4]), радикал N кольца $\mathfrak{A}$ в смысле Брауна — Маккоя есть совокупность всех таких элементов a кольца $\mathfrak{A}$, что $a_1 \in F(a_1)$ для любого элемента a_1 из главного идеала (a). Кольцо $\mathfrak{A}$ является присоединенно-простым, т. е. справедливо равенство $\mathfrak{A} = N$, тогда и только тогда, если $F(a) = \mathfrak{A}$ для любого элемента a из $\mathfrak{A}$. Если кольцо $\mathfrak{A}$ не присоединенно-простое, то $\mathfrak{A}$ содержит максимальные отмеченные идеалы M_α и радикал N есть пересечение всех M_α ([4, 2]). Как обычно, кольцо $\mathfrak{A}$ называется полупростым, если $N = 0$. Фактор-кольцо $\mathfrak{A}/N$ является полупростым и некоторое кольцо $\mathfrak{A}$ будет полупростым в том и только в том случае, если оно изоморфно подпрямой сумме простых колец с единицей ([4]).

Лемма 1. *Если в кольце $\mathfrak{A}$ идеал A_1, рассматриваемый как кольцо, обладает единицей и содержится в некотором идеале A, то существует такой идеал A_2 кольца $\mathfrak{A}$, что $A = A_1 + A_2$.*

Как обычно, ненулевой идеал A называется минимальным, если единственный идеал кольца $\mathfrak{A}$, строго содержащийся в A есть нулевой идеал.

Лемма 2. *В произвольном кольце $\mathfrak{A}$ всякий минимальный идеал A (если такой существует) является либо присоединенно-простым кольцом, либо простым кольцом с единицей.*

Теорема 1. *Полупростое кольцо является специальной**** подпрямой суммой простых колец с единицей тогда и только*

* Здесь и всюду ниже под идеалом следует понимать двусторонний идеал.

** Аннулятор A^* некоторого идеала A есть совокупность всех таких элементов x кольца $\mathfrak{A}$, что $xA = Ax = 0$.

*** Как известно, идеал A кольца $\mathfrak{A}$ называется отмеченным (регулярным), если фактор-кольцо $\mathfrak{A}/A$ имеет единицу.

**** Как известно ([6]), подпрямая сумма $\mathfrak{A}$ некоторого множества колец A_α называется специальной подпрямой суммой, если для любого α $\mathfrak{A} \supseteq A_\alpha$.

тогда, когда всякий ненулевой идеал содержит минимальные идеалы.

Лемма 3. *В полупростом кольце с условием минимальности для главных идеалов всякий главный идеал есть конечная прямая сумма простых колец с единицей.*

Теорема 2. *Полупростое кольцо с условием минимальности для главных идеалов является дискретной прямой суммой простых колец с единицей. Обратно, дискретная прямая сумма простых колец с единицей есть полупростое кольцо с условием минимальности для главных идеалов.*

Следствие 1. *Кольцо $\mathfrak{A}$ будет дискретной прямой суммой полных матричных колец над некоторыми телами тогда и только тогда, когда оно полупростое и с условием минимальности для главных правых идеалов.*

В дальнейшем через $E(\mathfrak{A})$ или просто E будем обозначать сумму всех минимальных идеалов с единицей A_α некоторого кольца $\mathfrak{A}$. Как известно, эта сумма будет прямой, т. е. $E = \dot{\sum_\alpha} A_\alpha$, причем каждый идеал A_α является простым кольцом с единицей. Если кольцо $\mathfrak{A}$ не содержит ненулевых минимальных идеалов с единицей, то $E = 0$.

Лемма 4. *Пусть I — произвольный идеал в кольце $\mathfrak{A}$. Если идеал A кольца I идемпотентен, т. е. $A^2 = A$, то A будет идеалом и в $\mathfrak{A}$.*

Заметим, что если элемент a принадлежит идеалу E, то главный идеал (a) обладает единицей.

Лемма 5. *Если A есть сумма некоторого множества минимальных идеалов с единицей кольца $\mathfrak{A}$, а I — произвольный идеал в $\mathfrak{A}$, то $A \cap I = AI = IA$.*

Лемма 6. *Если $\sum A_\alpha$ есть сумма некоторого множества минимальных идеалов с единицей A_α, а $\sum I_\beta$ — сумма произвольных идеалов I_β, то*

$$(\sum A_\alpha) \cap (\sum I_\beta) = \sum A_\alpha \cap I_\beta.$$

Теорема 3. *Если A — произвольный идеал в кольце $\mathfrak{A}$, то $E(A) = A \cap E(\mathfrak{A}) = AE(\mathfrak{A}) = E(\mathfrak{A})A$.*

Теорема 4. *В произвольном кольце $\mathfrak{A}$ имеют место следующие соотношения:*

1°. $E \cap N = 0$;

2°. $N \subseteq E^*$, $E \subseteq N^*$;

3°. $E \cap E^* = 0$;

4°. $N = N(E^*)$, $E = E(N^*)$,

где E^* и N^*, соответственно, — аннуляторы идеалов E и N.

Легко видеть, что аннулятор E^* совпадает со всем кольцом в том и только в том случае, если кольцо $\mathfrak{A}$ не содержит минимальных идеалов с единицей.

Определение. Кольцо $\mathfrak{A}$ будем называть присоединенно-полупростым, если оно не содержит минимальных идеалов с единицей, т. е. если $\mathfrak{A} = E^*$.

Таким образом, кольцо $\mathfrak{A}$ будет присоединенно-полупростым, если оно не содержит вовсе минимальных идеалов либо его минимальные идеалы являются присоединенно-простыми кольцами.

Если кольцо $\mathfrak{A}$ ограничено своим радикалом, т. е. $N^* \subseteq N$, то оно будет присоединенно-полупростым кольцом. Обратное утверждение, вообще говоря, неверно. Однако справедлива

Теорема 5. *Если фактор-кольцо $\mathfrak{A}/N$ удовлетворяет условию минимальности для главных идеалов, то кольцо $\mathfrak{A}$ будет присоеди-*

нечно-полупростым в том и только в том случае, когда оно ограничено своим радикалом.

Лемма 7. *Если $\mathfrak{A}$ не присоединенно-полупростое кольцо, то E^* есть пересечение всех таких максимальных отмеченных идеалов, которые являются прямыми слагаемыми в кольце $\mathfrak{A}$.*

Теорема 6. *В кольце $\mathfrak{A}$ всякий ненулевой идеал содержит минимальные идеалы с единицей тогда и только тогда, когда $E^* = 0$.*

В силу одной известной теоремы ([6], теорема 16) последнее утверждение равносильно следующему:

Кольцо $\mathfrak{A}$ будет специальной подпрямой суммой простых колец с единицей тогда и только тогда, если $E^* = 0$.

Лемма 8. *Пересечение конечного числа максимальных отмеченных прямых слагаемых кольца $\mathfrak{A}$ будет также отмеченным прямым слагаемым в кольце $\mathfrak{A}$.*

Теорема 7. *Кольцо $\mathfrak{A}$ с нулевым аннулятором E^*, удовлетворяющее условию минимальности для отмеченных прямых слагаемых, есть конечная прямая сумма простых колец с единицей.*

Заметим, что, очевидно, верно и обратное утверждение.

Из одной теоремы Блэйра ([3], теорема 1) и леммы 2 следует

Теорема 8. *Если в кольце $\mathfrak{A}$ структура идеалов является структурой с дополнениями, то $\mathfrak{A} = E + N$, причем $N = E^*$.*

Следствие 2. *Если в присоединенно-полупростом кольце структура идеалов является структурой с дополнениями, то $\mathfrak{A}$ будет присоединенно-простым кольцом.*

Следствие 3. *Полупростое кольцо является дискретной прямой суммой простых колец с единицей тогда и только тогда, когда структура его идеалов является структурой с дополнениями.*

Идеал I некоторого кольца $\mathfrak{A}$ будем называть присоединенно-полупростым, если I не содержит минимальных идеалов с единицей кольца $\mathfrak{A}$.

Из леммы 4 следует, что присоединенно-полупростой идеал является присоединенно-полупростым кольцом.

Теорема 9. *Аннулятор E^* есть сумма всех присоединенно-полупростых идеалов кольца $\mathfrak{A}$.*

Отметим, что аннулятор E^* не является радикалом в смысле общего определения этого понятия, данного А. Г. Курошем ([5]).

Теорема 10. *Кольцо $\mathfrak{A}$ представимо в виде прямой суммы $\mathfrak{A} = E + E^*$ в том и только в том случае, если каждый его главный идеал содержит не более конечного числа минимальных идеалов с единицей.*

Следствие 4. *Полупростое кольцо представимо в виде прямой суммы $\mathfrak{A} = E + E^*$ тогда и только тогда, когда всякий его главный идеал содержит не более конечного числа минимальных идеалов.*

Заметим, что в предыдущем следствии аннулятор E^* является полупростым кольцом, не содержащим как двусторонних, так и односторонних минимальных идеалов.

Лемма 9. *Если A произвольный, а C — присоединенно-полупростой идеалы, то $A \cap (E + C) = A \cap E + A \cap C$.*

Из теорем 10, 2 и леммы 9 легко вытекает

Теорема 11. *Всякое кольцо $\mathfrak{A}$ с условием минимальности для главных идеалов представимо единственным образом в виде прямой суммы $\mathfrak{A} = H + H^*$, где H — полупростое кольцо ($H = E$), а H^* — присоединенно-полупростое кольцо с минимальными идеалами.*

Из теорем 11 и 5 следует

Теорема 12 (см. [1], теорема 6). *Кольцо $\mathfrak{A}$ с условием минимальности для всех идеалов представимо единственным образом в виде прямой суммы $\mathfrak{A} = H + H^*$, где H — полупростое кольцо (конечная*

прямая сумма простых колец с единицей), а H^* — кольцо, ограниченное своим радикалом.

Так как в случае колец с условием минимальности для всех правых идеалов радикал N совпадает с классическим радикалом, то из предыдущего утверждения следует теорема М. Холла ([7], теорема 2.2), а именно:

Теорема 13. *Кольцо $\mathfrak{A}$ с условием минимальности для всех правых идеалов представимо единственным образом в виде прямой суммы $\mathfrak{A} = H + H^*$, где H — полупростое кольцо в классическом смысле (конечная прямая сумма матричных колец), а H^* — кольцо, ограниченное своим классическим радикалом.*

Автор выражает глубокую благодарность проф. А. Г. Курошу за ценные замечания по данной работе.

Московский химико-технологический институт
им. Д. И. Менделеева

Поступило
5 XI 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] В. А. Андрунакиевич, ДАН, 98, № 3, 329 (1954). [2] В. А. Андрунакиевич, Изв. АН СССР, сер. матем., 16, 217 (1952). [3] R. L. Blair, Trans. Am. Math. Soc., 75, 136 (1953). [4] B. Brown, N. H. McCoy, Am. J. Math., 69, 46 (1947). [5] А. Г. Курош, Матем. сборн., 33 (75), 13 (1953). [6] N. H. McCoy, Bull. Am. Math. Soc., 53, 855 (1947). [7] M. Hall, Trans. Am. Math. Soc., 43, 391 (1940).