Доклады Академии Наук СССР
1954. Том XCIX, № 5

ФИЗИКА

Ю. В. НОВОЖИЛОВ

О КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ С ПРИЧИННЫМИ ОПЕРАТОРАМИ

(Представлено академиком В. А. Фоком 13 VII 1954)

В настоящей статье рассматривается квантовая теория с причинными операторами. Мы будем предполагать, что величинами, характеризующими поле, являются причинные операторы χ, $\bar{\chi}$ и Φ, а не обычные операторы ψ, $\bar{\psi}$ и φ (обозначения те же, что в [1]). Это предположение является естественным, если считать, что операторы в квантовой теории поля должны удовлетворять всем тем условиям, которые вытекают из общих свойств физических величин и не связаны с конкретным состоянием поля. Это предположение будет оправдано, если построенная таким образом теория окажется не менее полной, чем обычная квантовая теория поля.

1. Предположим сначала, что взаимодействие полей является точечным. Тогда в представлении взаимодействия уравнение с причинными операторами для функционала состояния Ω можно написать в виде

$$i\frac{\partial\Omega(t)}{\partial t}=\int I_5(x)\,\Phi(x)\,d^3x=V(t)\,\Omega(t), \tag{1}$$

где $I_5=\frac{1}{2}ig\,[\bar{\chi}\gamma_5\chi-\gamma_5\chi\bar{\chi}]$, χ и Φ подчиняются уравнениям движения для невзаимодействующих полей; только перестановки

$$[\Phi^a(x),\,\Phi^c(x')]=\tfrac{1}{2}\,\Delta_F(x-x'), \tag{2а}$$

$$\{\chi^a_\alpha(x),\,\bar{\chi}^c_\beta(x')\}=-\{\chi^c_\alpha(x),\,\bar{\chi}^a_\beta(x')\}=-\frac{1}{2}\,S^F_{\alpha\beta}(x-x') \tag{2б}$$

отличны от нуля.

Свойства операторов $\chi^a(x)$ и $\chi^c(x)$ можно выразить посредством соответствующих решений граничной задачи для уравнения Дирака

$$\chi^a(x)=\frac{1}{2}\int S^F(x-x')\,\varepsilon(t-t')\,\gamma_4\chi^a(x')\,d^3x', \tag{3а}$$

$$\chi^c(x)=\frac{1}{2}\int S^{AF}(x-x')\,\varepsilon(t-t')\,\gamma_4\chi^c(x')\,d^3x', \tag{3б}$$

где $S^{AF}(x)=\left(\gamma_\lambda\frac{\partial}{\partial x_\lambda}-m_e\right)(\Delta^e_F(x))^+$. Из (3а, б) следует решение граничной задачи для $\chi(x)$:

$$\chi(x)=-i\int S(x-x')\,\gamma_4\chi(x')\,d^3x'. \tag{4}$$

Для $\Phi^a(x)$ решение граничной задачи имеет вид

$$\Phi^a(x) = \int \frac{1}{2}\left[\frac{\partial \Phi^a(x')}{\partial t'}\Delta_F(x-x') - \Phi^a(x')\frac{\partial \Delta_F(x-x')}{\partial t'}\right]\varepsilon(t-t')\,d^3x'. \qquad (5)$$

Аналогичные формулы для $\Phi^c(x)$ и $\Phi(x)$ отличаются от (5) заменой, соответственно, Δ_F на Δ_F^+ и Δ_F на $\frac{1}{i}\Delta\cdot\varepsilon$. Отметим, что формула (4) по своему виду совпадает с соответствующей формулой для $\psi(x)$.

Чтобы выяснить смысл операторов χ^a и χ^c, рассмотрим состояние с зарядом Q': $Q\Omega = Q'\Omega$. Применение оператора заряда к функционалу $\chi^a(x)\Omega(t_1)$, $t > t_1$, дает при $t' > t$

$$Q(t')\chi^a(x)\Omega(t_1) =$$
$$= Q'\chi^a(x)\Omega(t_1) - \frac{e}{2}\int S^F(x-x')\gamma_4\chi(x')\,d^3x'\,\Omega(t_1) = (Q'-e)\chi^a(x)\Omega(t_1),$$

т. е. $\chi^a(x)$ уменьшает заряд системы на e. Аналогичным образом можно найти, что $\chi^c(x)$ увеличивает общий заряд на e. Оператор $\chi(x)$ не изменяет заряда системы.

Перестановочные соотношения (2а) показывают, что оператор $\Phi^a(x)$ можно выразить посредством функциональной производной по $\Phi^c(x)$:

$$\Phi^a(x) = \frac{1}{2}\int \Delta_F(x-x')\frac{\delta}{\delta\Phi^c(x')}\,d^4x'. \qquad (6)$$

Функционал состояния тогда нужно представить в виде

$$\Omega(t) = \sum_{n=0}^{\infty}\Omega_n =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n!}}\int d^3x_1\ldots d^3x_n\,\Psi_n(x_1\ldots x_n)\,\Phi^c(x_1)\ldots\Phi^c(x_n). \qquad (7)$$

Это можно рассматривать как обобщение метода функционалов Фока [2] на случай теории с причинными операторами.

Так как $[V(t), V(t')] = 0$ в силу (2), то матрица рассеяния имеет вид

$$S = \exp\left[-i\int_{-\infty}^{\infty} V(t')\,dt'\right] =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-g)^n}{n!}\int_{-\infty}^{\infty} d^4x_1\ldots\int_{-\infty}^{\infty} d^4x_n\,\{N(\bar{\chi}(x_1)\gamma_5\Phi(x_1)\chi(x_1))\ldots$$
$$\ldots N(\bar{\chi}(x_n)\gamma_5\Phi(x_n)\chi(x_n))\}, \qquad (8)$$

где N обозначает нормальное произведение. Матрица рассеяния (3) приводит к обычным результатам. Действительно, приведение матрицы рассеяния (8) к сумме нормальных произведений можно осуществлять при помощи (2) или вытекающих из (2) формул:

$$\chi(x)\bar{\chi}(x') = N(\chi(x)\chi(x')) - {}^1/_2\,S^F(x-x'),$$
$$\Phi(x)\Phi(x') = N(\Phi(x)\Phi(x')) + {}^1/_2\,\Delta_F(x-x').$$

Но эти формулы являются аналогом формулы $T(UV) = N(UV) + U^cV^c$, которая связывает T-произведение, N-произведение и связку опера-

торов U и V и является основной при преобразовании матрицы рассеяния (см., например, [3]).

Переход от представления взаимодействия к гейзенберговскому представлению с причинными операторами можно осуществлять обычным образом, так как перестановочные соотношения между операторами $\chi(x)$, $\bar{\chi}(x)$ и $\Phi(x)$ для одного времени совпадают с известными перестановочными соотношениями. Это не находится в противоречии со значениями перестановочных соотношений между причинными операторами для разных времен, так как перестановочные соотношения между причинными операторами для одного времени не являются частным случаем перестановочных соотношений для разных времен. Перестановочное соотношение для одного времени предполагает, что последовательность действия операторов на функционал определяется их положением. Если требовать, чтобы последовательность действия операторов совпадала с последовательностью времен операторов, то перестановку $[\varphi(\mathbf{r}, t), \varphi(\mathbf{r}', t)]$ можно рассматривать как предел выражения $\varphi(\mathbf{r}, t+\varepsilon)\varphi(\mathbf{r}', t) - \varphi(\mathbf{r}', t+\varepsilon)\varphi(\mathbf{r}, t)$ при $\varepsilon \to 0$, $\varepsilon > 0$, которое, однако, нельзя обобщить на случай разных времен в согласии с требованиями и релятивистской инвариантности и причинности (задание направления времени).

Если, например, $\hat{\Phi}$ — оператор и $\mathbf{\Phi}$ — функционал в гейзенберговском представлении, то

$$(\mathbf{\Phi}^*, \hat{\Phi}(x)\mathbf{\Phi}) = \lim_{\varepsilon\to 0} (\Omega^*(t+\varepsilon), \Phi(x)\Omega(t-\varepsilon)) =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} (\mathbf{\Phi}^*, S^{-1}(t+\varepsilon)\Phi(x)S(t-\varepsilon)\mathbf{\Phi}),$$

где предельный переход введен для того, чтобы обозначить направление времени. Отсюда следует, что изменение во времени гейзенберговского оператора определяется формулой

$$\frac{\partial}{\partial t}\hat{\Phi}(x) = S^{-1}(t+\varepsilon)\frac{\partial\Phi(x)}{\partial t}S(t-\varepsilon) +$$

$$+\left[\hat{\Phi}(x)S^{-1}(t-\varepsilon)\frac{\partial S(t-\varepsilon)}{\partial t} - S^{-1}(t+\varepsilon)\frac{\partial S(t+\varepsilon)}{\partial t}\hat{\Phi}(x)\right],$$

из которой следует, что при $\varepsilon \to 0$ выражение в скобках действительно переходит в обычное перестановочное соотношение для одного времени.

2. Использование причинных операторов позволяет рассматривать не только точечные взаимодействия, но и взаимодействия более общего типа.

Известно, что в обычной квантовой теории поля нельзя релятивистски инвариантным образом ввести неточечное взаимодействие (см., например, [4]), так как при неточечном взаимодействии не выполняются условия интегрируемости уравнений поля.

Рассмотрим условия интегрируемости в теории с причинными операторами. Уравнение поля в представлении взаимодействия при использовании сверхмноговременного формализма имеет вид

$$i\frac{\delta\Omega(\sigma)}{\delta\sigma(x)} = V(x)\Omega(\sigma), \tag{9}$$

где $V(x)$ — плотность энергии взаимодействия.

Условием интегрируемости уравнения (9) является соотношение

$$\frac{\delta^2\Omega(\sigma)}{\delta\sigma(x)\,\delta\sigma(x')} = \frac{\delta^2\Omega(\sigma)}{\delta\sigma(x')\,\delta\sigma(x)},$$

или

$$[V(x), V(x')] = 0. \tag{10}$$

Соотношение (10) для теории с причинными операторами выполняется для любых интервалов между точками x и x'.

В частности, условие интегрируемости (10) будет выполняться и в случае, когда взаимодействие не является точечным, например

$$V(x) = I_5(x) \int F(x, x')\, \Phi(x')\, d^4x'. \tag{11}$$

Функция $F(x, x')$ должна быть релятивистски ковариантной и интегрируемой: $\int F(x, x')\, d^4x'$ должен быть конечен, чтобы матричные элементы действующего поля $\Phi_g(x) = \int F(x, x')\, \Phi(x')\, d^4x'$ были ограниченными величинами.

Перестановочные соотношения для $\Phi_g(x)$ и $\Phi_g(x')$ не изменяются, перестановочное соотношение между рождающей $\Phi^c_g(x)$ и поглощающей $\Phi^a_g(y)$ частями имеет вид

$$[\Phi^a_g(x), \Phi^c_g(y)] = \frac{1}{2} \int F(x, x')\, F(y, y')\, \Delta_F(x' - y')\, d^4x' d^4y'. \tag{12}$$

В случае квантовой электродинамики условие градиентной инвариантности будет выполнено, если $F(x, x')$ есть функция от $x - x'$.

Исследование свойств функции $F(x, x')$ и ее построение является отдельной задачей.

Ленинградский государственный университет
им. А. А. Жданова

Поступило
3 VII 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Ю. В. Новожилов, ДАН, **99**, № 4 (1954). [2] В. А. Фок, Sow. Phys., **6**, 425 (1934). [3] А. И. Ахиезер, В. Б. Берестецкий, Квантовая электродинамика, 1953. [4] М. А. Марков, ЖЭТФ, **25**, 526 (1953).