Доклады Академии Наук СССР
1954. Том XCIX, № 5

МАТЕМАТИКА

С. Д. ЭЙДЕЛЬМАН

ТЕОРЕМЫ ТИПА ТЕОРЕМЫ ЛИУВИЛЛЯ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ И ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 23 IX 1954)

Настоящая заметка посвящена установлению ряда теорем, характеризующих форму регулярных решений некоторых параболических и эллиптических систем по оценке их поведения на бесконечности.

Мы используем методы и обозначения нашей статьи [3].

1. Рассмотрим параболическую систему

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \Phi^{(2b)}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) U, \tag{1}$$

где

$$\Phi^{(2b)}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) = \left\| \sum_{k_1+\ldots+k_n=2b} a_{ij}^{(k_1\ldots k_n)} \frac{\partial^{2b}}{\partial x_1^{k_1}\ldots\partial x_n^{k_n}} \right\|; \quad U = \left\| \begin{matrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{matrix} \right\|.$$

Пусть $U(x, t)$ — регулярное решение системы (1) в полупространстве $t \leqslant T$, удовлетворяющее неравенству

$$|U(x, t)| \leqslant M[r(x)^\alpha + 1]^*, \quad r(x) = \sqrt{\sum_{s=1}^{n} x_s^2}. \tag{2}$$

(α, M — некоторые неотрицательные постоянные).

Тогда имеет место:

Теорема 1. *Всякое регулярное в полупространстве $t \leqslant T$ решение параболической системы* (1), *удовлетворяющее неравенству* (2), *представляет собой систему полиномов степени* $[\alpha]$ *по* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *и* $\left[\frac{\alpha}{2b}\right]$ *по* t.

В частности, если $\alpha < 1$, *то* $U(x, t)$ *представляет собой постоянный вектор.*

Доказательство. Используя единственность решения задачи Коши в плане неограниченных функций (2), представим решение $U(x, t)$ в виде $U(x, t) = \int G(t - t_0, x - \xi)\ U(\xi, t_0)\, d\xi$ ($G(t - t_0, x - \xi)$ — матрица Грина системы (1), интегрирование проводится по всему пространству $\xi_1, \ldots, \xi_n$) и проведем оценки, используя (2), справедливость для $G(t - t_0, x - \xi)$ оценок О. А. Ладыженской [1, 2]

* Всюду под A понимается норма $A = \| a_{ij} \|_{\substack{i=1,\ldots,N \\ j=1,\ldots,N}}$:

$$|A| = \sqrt{\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} |a_{ij}|^2}.$$

БИБЛ
ин
желез дорожного

$$\left|\frac{\partial^m G(t-t_0, x-\xi)}{\partial x_1^{m_1}\partial x_2^{m_2}\ldots\partial x_n^{m_n}}\right| \leqslant \frac{C_m}{(t-t_0)^{\frac{n+m}{2b}}} \exp\left[-cr(x-\xi)^{\frac{2b}{2b-1}}(t-t_0)^{-\frac{1}{2b-1}}\right] \quad (3)$$

и то, что $-t_0$ может быть произвольно большим.

Замечание 1. Если $\alpha \leqslant 2b-1$, то теорема 1 распространяется на регулярные решения параболического уравнения $\frac{\partial u_1}{\partial t} = \Phi_{11}\left(t_1 \frac{\partial}{\partial x}\right) u_1 + + \Phi_0(t) u_1$; если коэффициенты $\Phi_{11}^{(k_1\ldots k_n)}(t)$, входящие в оператор $\Phi_{11}^{2b}\left(t_1 \frac{\partial}{\partial x}\right)$, непрерывны и ограничены, $\Phi_0(t) \leqslant \delta_1$, $\delta_1 \leqslant 0$ при $t \leqslant T$.

Замечание 2. Если система (1) «обратно» параболична, т. е. все корни определителя матрицы $\Phi^{(2b)}(i\alpha) - \lambda E$, $\sum_{s=1}^{n} \alpha_s^2 = 1$, имеют положительную вещественную часть, то справедлива теорема 1 для регулярных решений таких систем в полупространстве $t \geqslant T$.

Если же система вида (1) не параболична и не «обратно» параболична, то для нее не может быть справедлива теорема 1. Действительно, в этом случае существуют такие действительные $\alpha_1^*, \ldots, \alpha_n^*$, $\sum_{s=1}^{n} \alpha_s^{*2} = 1$, которым соответствует чисто мнимый корень определителя матрицы $\Phi^{(2b)}(i\alpha) - \lambda E$; но тогда существует постоянный ненулевой вектор B такой, что $U = Be^{i\,[a\,(\alpha_1^*\ldots\alpha_n^*)\,t + \alpha_1^* x_1 + \ldots + \alpha_n^* x_n]}$ будет решением системы (1), ограниченным во всем пространстве $(x_1, \ldots, x_n, t)$. Таким образом: *класс систем вида* (1), *для которых справедлива обобщенная теорема Лиувилля, исчерпывается параболическими системами и системами, которые получаются из параболических заменой* t *на* $-t$.

2. Из теоремы 1 непосредственно следует, что всякое регулярное во всем пространстве $x_1, \ldots, x_n$ решение $U(x)$ эллиптической системы $\Phi^{(2b)}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) U = 0$, являющейся правой частью параболической системы (1), которое удовлетворяет неравенству (2) для всех $x_1, \ldots, x_n$, является полиномом степени $[\alpha]$ по $x_1, \ldots, x_n$. Рассмотрим произвольную эллиптическую систему с вещественными коэффициентами, содержащую только группу старших по порядку дифференцирования членов

$$A_0\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) U = 0,$$

$$A_0\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) = \left\| \sum_{k_1+k_2+\ldots+k_n=s_j} a_{ij}^{(k_1\ldots k_n)} \frac{\partial^{s_j}}{\partial x_1^{k_1}\partial x_2^{k_2}\ldots\partial x_n^{k_n}} \right\|. \quad (4)$$

Запишем условие эллиптичности $f(\alpha) = \det\left\| \sum_{k_1+\ldots+k_n=s_j} a_{ij}^{(k_1\ldots k_n)} \alpha_1^{k_1}\ldots\alpha_n^{k_n} \right\|$ для всех действительных $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, для которых $\sum_{s=1}^{n} \alpha_s^2 = 1$. В силу предполагаемой вещественности $a_{ij}^{(k_1\ldots k_n)}$ из эллиптичности системы (4) следует, что $s_1 + s_2 + \ldots + s_N = 2b$. Можно считать $f(\alpha) = \varphi^{(2b)}(i\alpha) < 0$, $\sum_{s=1}^{n} \alpha_s' = 1$. Заметим, что если через $A_0^*(\alpha)$ обозначить матрицу, элементами строк которой служат алгебраические дополнения элементов столбцов матрицы $A_0(\alpha)$, то $A_0^*(\alpha) A(\alpha) = f(\alpha) E$ и, следовательно,

$A_0^*\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)A_0\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)=f\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)E$, таким образом каждое регулярное решение системы (4) является регулярным решением* параболической системы $\frac{\partial U}{\partial t}=\Phi\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)U$. Поэтому справедлива

Теорема 2. *Всякое регулярное во всем пространстве* $x_1, \ldots, x_n$ *решение системы* (4), *удовлетворяющее условию* (2), *представляет собой систему полиномов степени* $[\alpha]$ *по* $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Заметим, что условие эллиптичности является не только достаточным, но и необходимым условием справедливости для системы вида (4) теоремы 2, так как, если хотя бы при одном наборе действительных $\alpha_1^*, \alpha_2^*, \ldots, \alpha_n^*$ $f(\alpha^*)=0$, то существовал бы постоянный ненулевой вектор C такой, что $C\exp\left[i\sum_{s=1}^{n}\alpha_s^* x_s\right]$ было бы решением системы (4).

3. В некоторых частных случаях могут быть получены теоремы, усиливающие теоремы 1 и 2.

Рассмотрим параболическое уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\sum_{k=0}^{b}\Phi_{11}^{(2k)}\left(t, \frac{\partial}{\partial x}\right)u_1. \tag{5}$$

Предположим, что функции $\Phi_{k_1\ldots k_n}^{(2k)}(t)$, являющиеся коэффициентами при производных в операторе $\Phi_{11}^{(2k)}\left(t, \frac{\partial}{\partial x}\right)$, непрерывны и ограничены для $t\leqslant T$, а $\operatorname{Re}\Phi_{11}^{(2k)}(t, i\alpha)\leqslant -\delta_k r^{2k}(\alpha)$ $(\delta_k>0,\ t\leqslant T)$; тогда справедлива

Теорема 3. *Всякое регулярное в полупространстве* $t\leqslant T$ *решение уравнения* (5), *удовлетворяющее неравенству*

$$|U(x, t)|\leqslant Me^{(\delta_0-\varepsilon)(-t)} \tag{6}$$

при $t\leqslant T$ $(\varepsilon>0)$, *равно тождественно нулю.*

Рассмотрим параболическую систему

$$\frac{\partial U}{\partial t}=\Phi^{(2b)}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)U+AU, \tag{7}$$

предполагая, что матрица A имеет собственные значения с отрицательной вещественной частью $\operatorname{Re}\lambda\leqslant -\delta_0<0$, матрицы A и $\Phi^{(2b)}(i\alpha)$ коммутируют; тогда справедлива

Теорема 4. *Всякое регулярное решение системы* (7), *удовлетворяющее в полупространстве* $t\leqslant T$ *неравенству*

$$|U(x, t)|\leqslant M\exp\left[2\beta\left[\frac{c}{2\beta-1}\right]^{\frac{2b-1}{2b}}\right](\delta_0-\varepsilon)r(x) \tag{8}$$

$(\varepsilon>0$; *с из оценки* (3)), *тождественно равно нулю.*

Заметим, что для уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\ldots+\frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}-\delta_0 u \tag{9}$$

---

* Нужная для применения оператора $f\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$ дополнительная гладкость следует из возможности представления любого регулярного решения системы (4) через фундаментальную матрицу, построенную в [3].

$c = 1/4$, $b = 1$, поэтому (8) приобретает вид $|U(x, t)| \leqslant M \exp \sqrt{\delta_0 - \varepsilon r(x)}$, очевидно, что (9) имеет решение $C_1 \exp \sqrt{\delta_0} x_k$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$. Это показывает, что в этом случае теорема 4 не может быть улучшена.

В заключение считаю своим приятным долгом выразить благодарность чл.-корр. АН УССР Я. Б. Лопатинскому за ценное обсуждение результатов настоящей работы.

Черновицкий
государственный университет

Поступило
12 XI 1953

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] О. А. Ладыженская, Матем. сборн., **27**, 3 (1950). [2] С. Д. Эйдельман, Матем. сборн., **33**, 2 (1953). [3] Я. Б. Лопатинский, Укр. матем. журн., **3**, 1 (1951).