Доклады Академии Наук СССР
1954. Том XCIX, № 5

МАТЕМАТИКА

А. Г. ПИНСКЕР

ОБ УСЛОВИЯХ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ БАНАХОВА ПРОСТРАНСТВА L-ПРОСТРАНСТВУ

(Представлено академиком В. И. Смирновым 22 IX 1954)

Введенные Какутани L-пространства ([1]) представляют собой KB-пространства ([2]) с единицей и нормой, аддитивной для положительных слагаемых: из $x \geqslant 0$ и $y \geqslant 0$ следует $\|x+y\| = \|x\| + \|y\|$. Таковы все конкретные пространства суммируемых по Лебегу функций, заданных на некотором бикомпакте с вполне аддитивной мерой, определенной для всех его борелевских подмножеств, с обычным определением частичной упорядоченности.

Внимание исследователей привлекла следующая проблема: *указать условия, при которых пространство Банаха было бы эквивалентно L-пространству.*

Решения этой проблемы, предложенные рядом авторов (см., например, ([3,4])), опираются на предложение о существовании в банаховом пространстве некоторого множества элементов, обладающего теми или иными свойствами «конуса» положительных элементов в K-пространстве.

В настоящей заметке даются (только в терминах теории Банаха) условия, необходимые и достаточные для того, чтобы в банаховом пространстве мог быть выделен класс положительных элементов, удовлетворяющий всем аксиомам L-пространства.

Пусть E — произвольное пространство Банаха. Его подпространство X будем называть L-компонентой E, если E разлагается в прямую сумму подпространств X и X' так, что для любых элементов $x \in X$ и $x' \in X'$ $\|x+x'\| = \|x\| + \|x'\|$. Из этого определения следует, что X' является L-компонентой E одновременно с X. Будем говорить, что они дополняют друг друга до E.

В теории K-пространств существенное значение имеет понятие компоненты K-пространства (его правильного и нормального подпространства), определяемое в терминах частичной упорядоченности. Для L-пространств, одновременно полуупорядоченных и нормированных, имеют смысл оба понятия: компоненты и L-компоненты, более того, в L-пространствах эти понятия оказываются равносильными. В доказательстве этого утверждения используется эквивалентность в L-пространствах двух соотношений: $\|x+y\| = \|x\| + \|y\|$ и $x_+ + y_+ \wedge x_- + y_- = 0$. Имеет место следующая основная теорема:

Теорема. *Для того чтобы банахово пространство E было эквивалентно L-пространству, необходимо и достаточно выполнение следующих условий:*

1. *Объединение $X \vee Y$ и пересечение $X \wedge Y$ двух L-компонент пространства E суть L-компоненты E; для L-компонент справедлив дистрибутивный закон $X \wedge (Y \vee Z) = (X \wedge Y) \vee (X \wedge Z)$.*

2. *В пространстве E содержится элемент $\mathbf{1}$ (единица E), обладающий тем свойством, что множество $\mathfrak{E}$ его составляющих*

(проекций) во всевозможных L-компонентах E фундаментальное в E.

Здесь $X \vee Y$ означает множество всех элементов $\{x+y\}$, где $x \in X$, $y \in Y$, а $X \wedge Y$ — теоретико-множественное пересечение X и Y.

Приводим краткое доказательство теоремы. Пусть E — пространство Банаха, удовлетворяющее условиям теоремы. Если в множестве всех L-компонент E, обозначим его через $\mathfrak{X}$, ввести частичное упорядочение, полагая $X \leqslant Y$, если $X \subset Y$, то, в силу 1, $\mathfrak{X}$ — булева алгебра, в которой нулем служит «нулевая» компонента, а единицей — все пространство E. В таком случае всякая L-компонента X имеет единственное дополнение X' и составляющая (проекция) всякого элемента $x \in E$ в L-компоненте X, обозначим ее через $\mathrm{Pr}_X x$, определяется однозначно. Нетрудно видеть, имея в виду условие 2, что проекции единицы E в различные L-компоненты X отличны друг от друга. Это позволяет установить взаимно-однозначное соответствие между множествами $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{E}$, относя каждой L-компоненте X элемент $e \in \mathfrak{E}$, $e = \mathrm{Pr}_X \boldsymbol{1}$. Положим $e_1 \leqslant e_2$, если $X_1 \subset X_2$, где $e_1 = \mathrm{Pr}_{X_1} \boldsymbol{1}$ и $e_2 = \mathrm{Pr}_{X_2} \boldsymbol{1}$. Теперь и $\mathfrak{E}$ оказывается булевой алгеброй, изоморфной $\mathfrak{X}$.

Введем в рассмотрение множество $\bar{E}$ всех «ступенчатых» элементов E, т. е. элементов $\bar{x}$ вида

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i \quad \left(\sum_{i=1}^{n} e_i = 1 \right);$$

если все $\lambda_i \geqslant 0$, то $\bar{x}$ — положительный ступенчатый элемент. Всякий элемент $x \in E$, являющийся пределом (в смысле сходимости по норме) последовательности положительных ступенчатых элементов, будем называть положительным. Ясно, что сумма двух положительных элементов и произведение положительного элемента на число $\lambda \geqslant 0$ положительны. Заметим также, что из условий теоремы без труда следует, что

$$\| x \| = \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i| \, \| e_i \| .$$

Введем в $\bar{E}$ полуупорядочение, полагая $\bar{x} \leqslant \bar{y}$ $\left(\bar{x} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i, \ \bar{y} = \sum_{i=1}^{n} \mu_i e_i \right)$, если $\lambda_i \leqslant \mu_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. В таком случае $\bar{E}$ оказывается структурой, в которой

$$\bar{x} \vee \bar{y} = \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i \vee \mu_i) e_i, \quad \bar{x} \wedge \bar{y} = \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i \wedge \mu_i) e_i .$$

Если положить $v(\bar{x}) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \| e_i \|$, то

$$v(\bar{x}) + v(\bar{y}) = v(\bar{x} \vee \bar{y}) + v(\bar{x} \wedge \bar{y}),$$

и из $\bar{x} < \bar{y}$ следует $v(\bar{x}) < v(\bar{y})$. В таком случае E — метрическая структура, в которой расстояние

$$\rho(\bar{x}, \bar{y}) = v(\bar{x} \vee \bar{y}) - v(\bar{x} \wedge \bar{y}) = \| \bar{x} - \bar{y} \| .$$

В силу известных предложений Неймана — Биркгофа ([5]) метрическое пополнение $\overline{E}$, совпадающее в силу условия 2 с E, также представляет собой метрическую структуру, в которой всякое ограниченное множество обладает гранями (условно полная структура), и метрическая сходимость эквивалентна звездной сходимости (по отношению к (o)-сходимости, порожденной полуупорядочением).

Таким образом, в E выделен класс положительных элементов, удовлетворяющий всем аксиомам K-пространства. При этом, что нетрудно проверить, для положительных слагаемых норма аддитивна, и дизъюнктные элементы E содержатся в дизъюнктных L-компонентах. Отсюда следует, что для любого $x \in E$ $\|x\| = \||x|\|$. Остается заметить, что элемент $\mathbf{1}$, существование которого постулируется в условии 2, обладает свойствами единицы K-пространства E.

Из всего этого следует, что E — L-пространство.

Необходимость условий теоремы вытекает из равносильности понятий компоненты и L-компоненты в L-пространстве и из хорошо известных свойств K-пространств с единицей.

При помощи основной теоремы легко установить условия эквивалентности банахова пространства L-пространству общего вида, не содержащему, вообще говоря, единицы.

Теорема. *Для того чтобы банахово пространство E было эквивалентно L-пространству (общего вида), необходимо и достаточно, чтобы*

1) *объединение двух и пересечение любого множества L-компонент E были L-компонентами E; для L-компонент выполнялся дистрибутивный закон;*

2) *любой элемент пространства E обладал свойствами «единицы» (см. условие 2 предыдущей теоремы) в наименьшей содержащей его L-компоненте E.*

Теоремы о характеризации L-пространств могут быть использованы в решении более общей проблемы характеризации произвольных KB-пространств и широкого класса KB-линеалов.

Всесоюзная высшая
финансовая школа

Поступило
10 VII 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] S. Kakutani, Ann. of Math., **42**, 523 (1941). [2] Л. В. Канторович, Б. З. Вулих, А. Г. Пинскер, Функциональный анализ в полуупорядоченных пространствах, М.—Л., 1950. [3] R. E. Fullerton, Fund. Math., **38**, 127 (1951). [4] L. J. Heider, Proc. Am. Math. Soc., **3**, № 2, 833 (1952). [5] Г. Биркгоф, Теория структур, ИЛ, 1952.