Доклады Академии Наук СССР
1954. Том XCIX, № 5

МАТЕМАТИКА

Член-корреспондент АН СССР С. Н. МЕРГЕЛЯН и М. М. ДЖРБАШЯН

О НАИЛУЧШИХ ПРИБЛИЖЕНИЯХ РАЦИОНАЛЬНЫМИ ФУНКЦИЯМИ

В настоящей заметке устанавливаются прямые и обратные теоремы о наилучших приближениях на окружности посредством рациональных функций с заданными полюсами, т. е. функций вида

$$\frac{P(z)}{\omega(z)}, \tag{1}$$

где $P(z)$ — произвольный многочлен степени $\leqslant n$, а $\omega(z)=(z-\lambda_1)\times$ $\times(z-\lambda_2)\cdots(z-\lambda_n)$; среди чисел λ_i могут быть равные.

Через $E(f, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ обозначим нижнюю грань чисел

$$\max_{|z|=1} |f(z)-R(z)|$$

в классе всевозможных рациональных функций вида (1).

Каждой конечной или бесконечной системе комплексных чисел $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n, \ldots$, расположенных вне окружности $|z|=1$, поставим в соответствие число $\varepsilon(\mu_1, \ldots, \mu_n, \ldots)=\varepsilon(\mu_i)$ по формуле

$$\varepsilon(\mu_i)=\left[1+\sum{}'(1-|\mu_i|)\right]^{-1}+\left[1+\sum{}''\left(1-\frac{1}{|\mu_i|}\right)\right]^{-1}, \tag{2}$$

в которой сумма Σ' распространяется на значения индекса i, для которых $|\mu_i|<1$, а Σ'' — на все остальные значения i. Если для всех i $|\mu_i|<1$ ($|\mu_i|>1$), то в формуле (2) сумма Σ'' (Σ') отсутствует.

Теорема 1. *Если функция $f(z)$, определенная на окружности $|z|=1$, имеет непрерывную p-ю производную, удовлетворяющую условию Липшица порядка $\alpha>0$, то, каковы бы ни были числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, $|\lambda_i|\neq 1$,*

$$E(f, \lambda_1, \ldots, \lambda_n)<C\left[\varepsilon(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)\left|\ln \varepsilon(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)\right|\right]^{p+\alpha},$$

где C зависит только от $f(z)$ и p.

Теорема 2. *Пусть $\Lambda=\{\lambda\}$ — произвольная последовательность комплексных чисел, $|\lambda|\neq 1$, среди которых могут быть равные.*

Если:

1) *расходится по крайней мере один из рядов*

$$\sum{}'(1-|\lambda_i|), \quad \sum{}''\left(1-\frac{1}{|\lambda_i|}\right); \tag{3}$$

2) *для каждой конечной системы чисел $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ из последовательности Λ*

$$E(f, \lambda_1, \ldots, \lambda_n)<\left[\varepsilon(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)\right]^{p+\alpha},$$

где $p\geqslant 0$ целое, $0<\alpha<1$;

3) *дуга l окружности $|z|=1$ не содержит предельных точек множества Λ,*

то на дуге l $f(z)$ имеет непрерывную p-ю производную, удовлетворяющую условию Липшица порядка α.

Доказательство теоремы 1. Пусть Σ^* — значение меньшей из сумм:

$$1+\sum{}'(1-|\lambda_i|), \quad 1+\sum{}'\left(1-\frac{1}{|\lambda_i|}\right)$$

и

$$N=\left[\frac{1}{p+\alpha+1}\frac{\Sigma^*}{\ln(\Sigma^*+1)}\right].$$

Числа λ_i, для которых $|\lambda_i|<1$, разобьем на N групп $\{\lambda_i^{(s)}\}$, $s=1,\ldots,N$ так, чтобы

$$\frac{\Sigma'(1-|\lambda_i|)}{N}\leqslant\sum_{(i)}(1-|\lambda_i^{(s)}|)<\frac{\Sigma'(1-|\lambda_i|)}{N}+1, \quad s=1,\ldots,N.$$

Соответственно, те λ_i, для которых $|\lambda_i|>1$, разобьем на N групп $\{\lambda_i^{(s)}\}$, $s=N+1,\ldots,2N$, для каждой из которых

$$\frac{\Sigma''\left(1-\frac{1}{|\lambda_i|}\right)}{N}\leqslant\sum_{(i)}\left(1-\frac{1}{|\lambda_i^{(s)}|}\right)<\frac{\Sigma''\left(1-\frac{1}{|\lambda_i|}\right)}{N}+1, \quad s=N+1,\ldots,2N.$$

В силу теоремы Джэксона, найдутся многочлены N-го порядка $Q_N\left(\frac{1}{z}\right)$ и $\Pi_N(z)$ так, что

$$\max_{|z|=1}\left|f(z)-Q_N\left(\frac{1}{z}\right)-\Pi_N(z)\right|<\frac{C_1}{N^{p+\alpha}}.$$

При этом $\max\limits_{|z|=1}\left\{\left|Q_N\left(\frac{1}{z}\right)\right|+|\Pi_N(z)|\right\}<C_f$, где C_1, C_f зависят лишь от $f(z)$ и от p.

Пусть

$$\varphi_s(z)=\prod_{(i)}\frac{1-z\overline{\lambda_i^{(s)}}}{z-\lambda_i^{(s)}}, \quad s=1,2,\ldots,2N.$$

Функция

$$R(z)=Q_N\left(\frac{1}{z}\right)\prod_{s=1}^{N}\left(1-\frac{\varphi_s(z)}{\varphi_s(0)}\right)+\Pi_N(z)\prod_{s=N+1}^{2N}\left(1-\frac{\varphi_s(z)}{\varphi_s(\infty)}\right)$$

является рациональной функцией вида (1). Оценим ее близость к $f(z)$ на окружности $|z|=1$:

$$|f(z)-R(z)|<$$

$$<\frac{C_1}{N^{p+\alpha}}+C_f\left\{\left|\prod_{s=1}^{N}\left(1-\frac{\varphi_s(z)}{\varphi_s(0)}\right)-1\right|\cdot\left|\prod_{s=N+1}^{2N}\left(1-\frac{\varphi_s(z)}{\varphi_s(\infty)}\right)-1\right|\right\}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{C_1}{N^{p+\alpha}}+C_2\sum_{s=1}^{N}\frac{1}{|\varphi_s(0)|}+C_2\sum_{s=N+1}^{2N}\frac{1}{|\varphi_s(\infty)|}<C\left[\varepsilon(\lambda_i)|\ln\varepsilon(\lambda_i)|\right]^{p+\alpha}.$$

Доказательство теоремы 2. Пусть для определенности расходится первый из рядов (3). Для каждого $n\geqslant 1$ из последова-

тельности Λ выберем числа $\lambda_{1,n}, \lambda_{2,n}, \ldots, \lambda_{k_n,n}$, $|\lambda_{i,n}|<1$, так, чтобы

$$2^n \leqslant \sum_{i=1}^{k_n} (1-|\lambda_{i,n}|)<2^n+1.$$

Пусть $R_n(z)$ — рациональная функция наилучшего приближения $f(z)$ с полюсами в $\lambda_{1,n}, \lambda_{2,n}, \ldots, \lambda_{k_n,n}$,

$$\max_{|z|=1} |f(z)-R_n(z)|<[\varepsilon(\lambda_{i,n})]^{p+\alpha},$$

$$f(z)=R_1(z)+\sum_{n=1}^{\infty}[R_{n+1}(z)-R_n(z)]. \tag{4}$$

Для доказательства теоремы достаточно показать, что ряд в правой части (4) можно почленно дифференцировать и оценить модуль непрерывности его p-й производной. Рассуждения аналогичны доказательству соответствующей теоремы Бернштейна и основываются на оценке производной рациональной функции. Приведем эту оценку. Пусть $|\lambda_i|<1$, $i=1, 2, \ldots, m$ и

$$\max_{|z|=1}\left|\frac{P(z)}{\omega(z)}\right|=M.$$

Функция

$$\frac{P(z)}{\omega(z)}\prod_{i=1}^{m}\frac{z-\lambda_i}{1-z\overline{\lambda_i}}$$

аналитична в $|z|\leqslant 1$, поэтому вблизи окружности $|z|=1$

$$\left|\frac{P(z)}{\omega(z)}\right|^2 \leqslant M^2\prod\left|\frac{1-z\overline{\lambda_i}}{z-\lambda_i}\right|^2 = M^2\prod\left(1+\frac{(1-|z|^2)(1-|\lambda_i|^2)}{|z-\lambda_i|^2}\right),$$

откуда и следует искомая оценка на дуге l, не содержащей предельных точек Λ:

$$\left|\frac{d^k}{dz^k}\frac{P(z)}{\omega(z)}\right|<C_k M\left(1+\sum(1-|\lambda_i|)\right)^k, \quad k=1, 2, \ldots,$$

где C_k зависит от дуги l и от k.

Как показывают примеры, условие 3 в теореме 2 отбросить нельзя. Аналогичные теоремы можно установить и для приближений на оси.

Сектор математики и механики
Академии наук Арм.ССР и
Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
4 X 1954