

Член-корреспондент АН СССР И. А. КИБЕЛЬ

ПРОСТРАНСТВЕННАЯ ЗАДАЧА ОБТЕКАНИЯ НЕРОВНОСТЕЙ ПОВЕРХНОСТИ ЗЕМЛИ ВОЗДУШНЫМ ПОТОКОМ

Плоская задача обтекания неровностей поверхности Земли послужила за последнее время предметом многочисленных исследований. Пространственная задача изучена очень мало; нам известна лишь одна работа А. А. Дородницына ⁽¹⁾, посвященная этому вопросу.

В настоящей работе мы исследуем пространственную задачу обтекания неровностей Земли воздушным потоком, скорость которого U вдали от неровности вверх по течению становится горизонтальной. Мы считаем, что движение происходит внутри некоторого слоя, толщина которого на бесконечности с наветренной стороны есть H (несколько километров); над этим слоем атмосфера находится в состоянии покоя.

Будем отвлекаться от явлений, происходящих в пограничном слое Земли, и считать атмосферу идеальной жидкостью, движущейся стационарно и адиабатически. Все обтекание рассматриваем как малое возмущение (линейная задача) „основного“ движения; последнее имеет скорость U , не зависящую ни от горизонтальных координат x_1, y_1 , ни от вертикальной координаты z_1 , направленную вдоль оси X_1 . Температура T_1 основного движения предполагается линейной функцией одного только z_1 , так что $\partial T_1 / \partial z_1 = -\gamma = \text{const}$.

Задача сводится приблизительно к решению уравнения для вертикальной скорости w :

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + D^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) W = 0, \quad (1)$$

где $W = \rho w e^{\frac{\gamma_a - \gamma}{2TH} z}$, $D^2 = g \frac{\gamma_a - \gamma}{U^2 T} H^2$ ($x = \frac{x_1}{H}$, $y = \frac{y_1}{H}$, $z = \frac{z_1}{H}$, ρ — плотность в основном движении, γ_a — адиабатический градиент, g — ускорение силы тяжести, T — средняя температура).

В качестве краевых условий можно приблизительно * принять:

$$\text{при } z = 0 \quad W = \rho_0 U \frac{\partial \zeta}{\partial x}; \quad (2)$$

$$\text{при } z = 1 \quad W = 0 \quad (3)$$

(ρ_0 — плотность ρ на уровне моря, $z = \zeta(x, y)$ — уравнение поверхности неровности).

* Приближения в (1) и (3) заключаются в пренебрежении членами типа U^2/kRT и U^2/gH по сравнению с единицей (R — газовая постоянная, k — отношение теплоемкостей).

Если w известно, возмущения температуры и давления найдутся квадратурами, а возмущения горизонтальных скоростей определяются затем из конечных соотношений.

Решение для (1) при краевых условиях (2), (3) ищем в виде

$$W = (1 - z) \rho_0 U \frac{\partial \zeta}{\partial x} + S(x, y, z). \quad (4)$$

Тогда S будет удовлетворять неоднородному дифференциальному уравнению

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} + D^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) S = -(1 - z) \psi(x, y), \quad (5)$$

где

$$\psi(x, y) = \rho_0 U \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + D^2 \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right), \quad (6)$$

и однородным краевым условиям:

$$\text{при } z = 0 \quad S = 0; \quad \text{при } z = 1 \quad S = 0. \quad (7)$$

Разложим теперь $1 - z$ в интересующем нас интервале изменений z в ряд по $\sin n\pi z$:

$$1 - z = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin n\pi z, \quad (8)$$

и будем искать решение для S в виде

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} S_n(x, y) \sin n\pi z. \quad (9)$$

Получим уравнение:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \frac{\partial^2 S_n}{\partial x^2} + (D^2 - n^2 \pi^2) \frac{\partial^2 S_n}{\partial x^2} + D^2 \frac{\partial^2 S_n}{\partial y^2} = -\frac{2}{\pi n} \psi(x, y). \quad (10)$$

Если представить ψ при помощи интеграла Фурье $\psi(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_m(x) e^{imy} dm$, где $\psi_m(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x, \eta) e^{-im\eta} d\eta$, и искать S_n в виде

$$S_n(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{nm}(x) e^{imy} dm, \quad (11)$$

то для $S_{nm}(x)$ получим обыкновенное дифференциальное уравнение

$$S_{nm}'''' - (n^2 \pi^2 + m^2 - D^2) S_{nm}'' - D^2 m^2 S_{nm} = -\frac{2}{\pi n} \psi_m(x). \quad (12)$$

Соответствующее характеристическое уравнение имеет 4 корня: $+\lambda$, $-\lambda$, $+i\nu$, $-i\nu$, где

$$\lambda = \sqrt{1/2(Q - D^2 + m^2 + n^2 \pi^2)}, \quad \nu = \sqrt{1/2(Q + D^2 - m^2 - n^2 \pi^2)}, \quad (13)$$

$$Q = \sqrt{(D^2 - m^2 - n^2 \pi^2)^2 + 4D^2 m^2}.$$

Теперь мы можем написать решение для $S_{nm}(x)$, затухающее при $x \rightarrow -\infty$. Это будет:

$$S_{nm}(x) = \frac{2}{\pi^2 n D Q} \left[\frac{\nu}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda |x - \xi|} \psi_m(\xi) d\xi + \lambda \int_{-\infty}^x \sin \nu(x - \xi) \psi_m(\xi) d\xi \right]. \quad (14)$$

Используя это выражение, выполняя интегрирование по частям с тем, чтобы в окончательный результат вошло не ψ , а непосредственно ζ (при этом мы считаем, что при $x \rightarrow -\infty$ $\zeta \rightarrow 0$, $\partial \zeta / \partial x \rightarrow 0$, $\partial^2 \zeta / \partial x^2 \rightarrow 0$, а при $|y| \rightarrow \infty$ $\partial \zeta / \partial y \rightarrow 0$), получим окончательно после простых преобразований решение для w в виде:

$$w = 2 \frac{\rho_0}{\rho} e^{-H \frac{\gamma_a - \gamma}{2T} z} U \sum_{n=1}^{\infty} n W_n(x, y) \sin n \pi z, \quad (15)$$

где

$$\begin{aligned} W_n(x, y) = & - \int_0^{\infty} \frac{\lambda^2}{2Q} \int_{-\infty}^{+\infty} \cos m(y - \eta) \left[\int_{-\infty}^x e^{-\lambda(x-\xi)} \zeta(\xi, \eta) d\xi - \right. \\ & \left. - \int_x^{\infty} e^{\lambda(x-\xi)} \zeta(\xi, \eta) d\xi \right] d\eta dm + \\ & + \int_0^{\infty} \frac{\nu^2}{Q} \int_{-\infty}^{+\infty} \cos m(y - \eta) \int_{-\infty}^x \cos \nu(x - \xi) \zeta(\xi, \eta) d\xi d\eta dm. \end{aligned} \quad (16)$$

В частном случае, если ζ зависит только от x (плоская задача), $\zeta = Z(x)$, можно выполнить квадратуры по η , так как

$$\int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(m) \cos m(y - \eta) d\eta dm = \pi f(0).$$

При этом

$$\begin{aligned} (Q)_{m=0} &= |D^2 - n^2 \pi^2|, \quad (\lambda)_{m=0} = V^{1/2} [|D^2 - n^2 \pi^2| - (D^2 - n^2 \pi^2)], \\ (\nu)_{m=0} &= V^{1/2} [|D^2 - n^2 \pi^2| + D^2 - n^2 \pi^2]. \end{aligned} \quad (17)$$

Пусть n_0 — максимальное значение n , для которого $D^2 - n^2 \pi^2 > 0$ (в атмосферных условиях $n_0 = 3$). Тогда при $n \leq n_0$ $\lambda = 0$, $\nu = 1$: при $n > n_0$ $\lambda = 1$, $\nu = 0$. Итак, для плоского случая:

$$\text{если } n \leq n_0: \quad W_n(x, y) = -\pi \int_{-\infty}^x \cos [\sqrt{D^2 - n^2 \pi^2} (x - \xi)] Z(\xi) d\xi; \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \text{если } n > n_0: \quad W_n(x, y) = & -\frac{\pi}{2} \left[\int_{-\infty}^x e^{-\sqrt{n^2 \pi^2 - D^2} (x - \xi)} Z(\xi) d\xi - \right. \\ & \left. - \int_x^{\infty} e^{\sqrt{n^2 \pi^2 - D^2} (x - \xi)} Z(\xi) d\xi \right]. \end{aligned} \quad (19)$$

Вернемся к пространственной задаче. Пусть неровность сосредоточена вся в малой области, например вблизи начала координат; тогда мы можем написать для $W_n(x, y)$:

$$W_n(x, y) = b \int_0^{\infty} \frac{\lambda^2}{2Q} \cos m y e^{\lambda x} dm, \quad \text{если } x < 0; \quad (20)$$

$$W_n(x, y) = -b \left[\int_0^{\infty} \frac{\lambda^2}{2Q} \cos m y e^{-\lambda x} dm + \int_0^{\infty} \frac{\nu^2}{Q} \cos \nu x \cos m y dm \right], \quad \text{если } x > 0, \quad (21)$$

где $b = \lim_{\substack{\xi \rightarrow 0 \\ \eta \rightarrow 0}} \iint \zeta(\xi, \eta) d\xi d\eta$.

Таким образом, возмущение, исходящее из точки $x = y = 0$, будет распространяться как вверх (формула (20)), так и вниз (формула (21)) по потоку. Можно убедиться, что интегралы, содержащие $e^{\lambda x}$ и $e^{-\lambda x}$, дадут быстро затухающие члены; напротив, второй интеграл в (21) может давать незатухающие значения далеко от начала координат по типу корабельных волн. Применим метод установившихся фаз, записав предварительно $\cos vx \cos my = \frac{1}{2} [\cos (my - vx) + \cos (my + vx)]$ и отыскивая экстремумы выражений $mt - v$ или $mt + v$, где $t = y/x$. Без труда можно определить предельные значения величин $|t|$, для которых еще возможны упомянутые экстремумы. Это будут

$$t_{\max}^2 = \frac{3}{16D^2} \frac{n^4\pi^4}{\frac{8}{9}D^2 - n^4\pi^2 + \sqrt{\left(\frac{8}{9}D^2 - n^2\pi^2\right)^2 + \frac{D^2 - n^2\pi^2}{3} \frac{n^4\pi^4}{D^2}}}. \quad (22)$$

Благодаря линейности решения задачи суперпозицией выражений типа (20), (21) можно дать решение для общего случая. Практически, однако, при расчетах удобнее оперировать не с точечными источниками, а с возмущениями, связанными с конечными площадками. В качестве примера рассмотрим обтекание плато с горизонтальной поверхностью, с высотой ζ_0 , расположенного в квадранте положительных значений x и отрицательных y ($\zeta = \zeta_0$, если $x > 0$, $y < 0$; $\zeta = 0$ во всех других точках). Как и в случае точечного возмущения, рассмотрим две области: область I, в которой $x \leq 0$, и область II, где $x \geq 0$.

В области I:

$$W_n = -\frac{\zeta_0}{2} \int_0^\infty \frac{\lambda}{Q} e^{\lambda x} \frac{\sin my}{m} dm \quad \text{для } n \leq n_0; \quad (23)$$

$$W_n = \frac{\pi}{4} \frac{\zeta_0 e^{\sqrt{n^2\pi^2 - D^2} x}}{\sqrt{n^2\pi^2 - D^2}} - \frac{\zeta_0}{2} \int_0^\infty \frac{\lambda}{Q} e^{\lambda x} \frac{\sin my}{m} dm \quad \text{для } n > n_0. \quad (24)$$

В области II:

$$W_n = -\frac{\pi}{2} \frac{\zeta_0 \sin \sqrt{D^2 - n^2\pi^2} x}{\sqrt{D^2 - n^2\pi^2}} - \zeta_0 \left(\int_0^\infty \frac{\lambda}{2Q} e^{-\lambda x} \frac{\sin my}{m} dm - \int_0^\infty \frac{v}{Q} \sin vx \frac{\sin my}{m} dm \right) \quad \text{для } n \leq n_0; \quad (25)$$

$$W_n = \frac{\pi\zeta_0}{4} \frac{e^{-\sqrt{n^2\pi^2 - D^2} x}}{\sqrt{n^2\pi^2 - D^2}} - \frac{\zeta_0}{2} \left(\int_0^\infty \frac{\lambda}{2Q} e^{-\lambda x} \frac{\sin my}{m} dm - \int_0^\infty \frac{v}{Q} \sin vx \frac{\sin my}{m} dm \right) \quad \text{для } n > n_0. \quad (26)$$

Путем суперпозиции выражений типа (23)–(26) можно получить решения для разнообразных форм препятствия. Интегралы, входящие в (23)–(26), мы определяли численно.

Мы надеемся отдельно дать результаты расчетов примеров и сравнить эти результаты с наблюдениями (в особенности с наблюдениями над осадками).

Центральный институт
прогнозов

Поступило
1 XI 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ А. А. Доронницын, Тр. ГГО, в. 31 (1940).