

ГИДРОМЕХАНИКА

А. М. ФАЙНЗИЛЬБЕР

ИНТЕГРАЛЫ ПОДОБИЯ ВИХРЕВЫХ И ТЕМПЕРАТУРНЫХ ПОЛЕЙ

(Представлено академиком А. И. Некрасовым 25 IX 1954)

При наличии теплоотдачи на поверхности обтекаемого профиля уравнения гидротермодинамики вязких сред имеют интеграл подобия скоростных и температурных полей. Однако этот интеграл справедлив только для обтекания пластины и к тому же только при постоянной температуре поверхности. В настоящем сообщении получены другие интегралы уравнений гидротермодинамики, справедливые как для обтекания профиля произвольной формы, так и для переменной температуры поверхности.

1. Уравнения движения и теплового баланса при обтекании вязким газом профиля произвольной формы могут быть записаны в виде (мы даем их сначала в форме уравнений пограничного слоя без учета сжимаемости; обобщение на уравнения в форме Навье — Стокса дает-ся ниже)

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad (1)$$

$$c_p \left(u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} u + \frac{\lambda}{\rho} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \nu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2; \quad (2)$$

здесь u и v — составляющие скорости; T — абсолютная температура; ρ — плотность; p — давление; ν — кинематический коэффициент вязкости; λ — коэффициент теплопроводности. Введем новую переменную

$$\chi(x, y) = T + \frac{u^2}{2c_p} - a\omega; \quad (3)$$

здесь $\omega = du/dy$ — вихрь; a — некоторый постоянный коэффициент.

Дифференцируя уравнение (1) по y и складывая полученное уравнение с уравнением (1), умноженным на $u/2$, и с уравнением (2), получаем после некоторых преобразований следующее уравнение для функции χ ($\text{Pr} = c_p \mu / \lambda$, как обычно, равно 1):

$$u \frac{\partial \chi}{\partial x} + v \frac{\partial \chi}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2}. \quad (4)$$

При $y = \infty$ ω , как известно, равно 0, а для температуры торможения имеем $t = T + u^2/2c_p = \bar{T} + \bar{u}^2/2c_p = \bar{i} = \text{const}$, так как на границе слоя имеет место адиабатический интеграл энергии. Следовательно, граничное условие на бесконечности для переменной χ записывается:

$$\text{при } y = \infty \quad \chi = \bar{i} = \text{const}. \quad (5)$$

На поверхности профиля (при $y = 0$) в силу (1) имеем

$$\frac{\partial \omega}{\partial y} = \frac{1}{\mu} \frac{dp}{dx}, \quad (6)$$

здесь μ — динамический коэффициент вязкости.

Пусть распределение градиента температуры вдоль поверхности имеет вид

$$\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_0 = f(x). \quad (6')$$

Потребуем, чтобы

$$f(x) = \frac{a}{\mu} \frac{dp}{dx}. \quad (6'')$$

Тогда получаем граничное условие на поверхности для χ в виде

$$\text{при } y = 0 \quad \frac{\partial \chi}{\partial y} = 0. \quad (7)$$

Системе (4), (5), (7) можно удовлетворить интегралом

$$\chi = T + \frac{u^2}{2c_p} - a\omega = \bar{i} = \text{const}. \quad (8)$$

Если ввести относительную температуру торможения по формуле $t_* = T + u^2/2c_p - \bar{T} - \bar{u}^2/2c_p$ и обозначить через t_{*0} , ω_0 значения, соответствующие поверхности профиля, то интеграл (8) может быть записан в форме

$$\frac{t_*}{t_{*0}} = \frac{\omega}{\omega_0}, \quad (9)$$

т. е. получаем интеграл подобия температурных и вихревых полей.

2. Рассмотрим некоторые частные классы случаев.

А. Обтекание пластины. Имеем $dp/dx = 0$; в силу (6') и (6'') это соответствует

$$\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_0 = 0, \quad (10)$$

т. е. тепловой поток через поверхность отсутствует. Распределение температур вдоль поверхности согласно интегралу (8) имеет вид $T_0(x) = \bar{i} + a\omega_0(x)$ и, так как для пластины распределение скоростей в потоке определяется формулой $u = F(y/\sqrt{x})$, где F — известная функция (1), то $\omega_0(x) = k/\sqrt{x}$ и, следовательно, окончательно получаем

$$T_0 = \bar{i} + \frac{b}{\sqrt{x}}; \quad (11)$$

здесь $b = ak$ — некоторая константа ($k = 0,332 \sqrt{\mu} \sqrt{\bar{\mu}}$).

На основании (10) и (11) следует, что при распределении температур вдоль поверхности по формуле (11) тепловой поток через поверхность пластины будет отсутствовать.

Так как распределение вихрей в потоке выражается формулой $\omega = \frac{1}{Vx} F'\left(\frac{y}{Vx}\right)$, то для распределения температур в потоке, согласно (8), находим

$$T = \bar{i} + \frac{a}{Vx} F'\left(\frac{y}{Vx}\right) - \frac{F^2(y/\sqrt{x})}{2c_p}. \quad (12)$$

Б. Течение в конфузоре. В этом случае для распределения скоростей на границе слоя имеем $\bar{u}(x) = -c/x$; для градиента давления, следовательно, имеем $dp/dx = \rho c^2/x^3$. Согласно (6') и (6'')

$$\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_0 = \frac{ac^2}{\nu x^3}. \quad (13)$$

Так как для конфузора распределение скоростей в потоке определяется формулой (1)

$$u = \frac{1}{x} f\left(\frac{y}{x}\right), \text{ где } f\left(\frac{y}{x}\right) = -c \left[3 \operatorname{th}^2 \left(\sqrt{\frac{c}{2\nu}} \frac{y}{x} + 1,146 \right) - 2 \right], \quad (a)$$

то $\omega_0(x) = \frac{1}{x^2} f'(0) = -\frac{2c}{x^2} \sqrt{\frac{c}{3\nu}}$. Распределение температур вдоль поверхности, согласно (8), имеет вид

$$T_0(x) = \bar{t} - \frac{b}{x^2}, \quad (14)$$

где $b = 2ca\sqrt{c/3\nu}$ некоторая константа.

Распределение температур в потоке, согласно (8) и (a), находится при помощи формулы

$$T(x, y) = \bar{t} + \frac{a}{x^2} f'\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{f^2(y/x)}{2c\rho x^2}. \quad (15)$$

В. Полигональное распределение скоростей. Пусть имеем полигональное распределение скоростей на границе слоя $u = \beta_1 x$; в этом случае $dp/dx = -\rho\beta_1^2 x$. В силу (6') и (6'') для градиента температуры на поверхности имеем

$$\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_0 = -\frac{a}{\nu} \beta_1^2 x, \quad (16)$$

и, так как в рассматриваемом случае распределение скоростей в потоке определяется формулой (1) $u = \beta_1 x \varphi'(\sqrt{\beta_1/\nu} y)$, где φ' — известная функция, то $\omega_0(x) = \beta_1 \sqrt{\beta_1/\nu} x \varphi''(0) = 1,23 \beta_1 \sqrt{\beta_1/\nu} x$. Распределение температур вдоль поверхности, согласно (8), имеет вид

$$T_0(x) = \bar{t} + mx, \quad (17)$$

где $m = 1,23 \beta_1 \sqrt{\beta_1/\nu} a$ — некоторая константа.

Распределение температур в потоке, согласно (8), имеет вид

$$T(x, y) = \bar{t} + a\beta_1 \sqrt{\frac{\beta_1}{\nu}} x \varphi''\left(\sqrt{\frac{\beta_1}{\nu}} y\right) - \beta_1^2 x^2 \frac{\varphi'^2(\sqrt{\beta_1/\nu} y)}{2c\rho}. \quad (18)$$

Г. Степенное распределение скоростей. Пусть имеем степенное распределение скоростей на границе слоя $\bar{u} = cx^m$. Для градиента давления имеем $dp/dx = -\rho c^2 m x^{2m-1}$. В силу (6') и (6'') находим распределение градиента температур вдоль поверхности в виде

$$\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_0 = -\frac{a}{\nu} c^2 m x^{2m-1}. \quad (19)$$

Распределение скоростей в потоке определяется формулой (1) $u = \sqrt{2/(m+1)} \bar{u} g'(\sqrt{\bar{u}/\nu} y)$, где g — известная функция. Для распределения вихрей по поверхности находим $\omega_0(x) = \sqrt{2/(m+1)} \bar{u} \times \sqrt{\bar{u}/\nu} g''(0)$.

Распределение температур вдоль поверхности, согласно (8), имеет вид

$$T_0(x) = \bar{i} + bx^{(3m-1)/2}, \quad (20)$$

где $b = ca\sqrt{2c/(m+1)}\sqrt{g''(0)}$ — некоторая константа.

Распределение температур в потоке имеет вид

$$T(x, y) = \bar{i} + a\sqrt{\frac{2}{m+1}}\bar{u}\sqrt{\frac{\bar{u}}{vx}}g''\left(\sqrt{\frac{\bar{u}}{vx}}y\right) - \frac{\bar{u}^2 g''^2(\sqrt{\bar{u}/vx}y)}{(m+1)c_p}, \quad (21)$$

Для $m = 1/2$ тепловой поток через поверхность постоянен; для $m = 1/3$ температура вдоль поверхности постоянна; для $m = -0,0904$ температура вдоль поверхности также постоянна, так как вычисления показывают (1), что в этом случае $g''(0) = 0$.

3. Дадим обобщение указанных результатов на движение несжимаемой вязкой жидкости с произвольными числами Рейнольдса (т. е. для уравнений движения в форме Навье — Стокса). Уравнения для температуры и вихрей могут быть записаны (для несжимаемой жидкости диссипационный член опускается) в виде

$$u\frac{\partial T}{\partial x} + v\frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\lambda}{c}\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right), \quad (22)$$

$$u\frac{\partial \omega}{\partial x} + v\frac{\partial \omega}{\partial y} = \mu\left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2}\right). \quad (23)$$

Для $Pr = 1$ получаем интеграл

$$T = a\omega + \bar{T}. \quad (24)$$

Этот интеграл имеет место при выполнении соответствующих граничных условий для температуры.

Рассмотрим некоторые классы частных случаев.

Д. Течение жидкости между двумя параллельными стенками. В этом случае, как известно ($2h$ — расстояние между стенками), $\frac{dp}{dx} = \text{const}$; $u = -\frac{1}{2\mu}\frac{\partial p}{\partial x}(h^2 - y^2)$; $v = 0$; $\omega = \frac{1}{\mu}\frac{\partial p}{\partial x}y$.

Согласно (24) получаем

$$T = \frac{a}{\mu}\frac{\partial p}{\partial x}y + \bar{T}. \quad (25)$$

Решение соответствует постоянной температуре и постоянному градиенту температуры вдоль поверхности.

Е. Течение жидкости между двумя параллельными стенками на расстоянии h , одна из которых движется со скоростью z . В этом случае $u = zy/h$; $v = 0$; $\omega = z/h$. Согласно (24) решение соответствует постоянной температуре по формуле

$$T = \bar{T} + a\frac{z}{h}. \quad (26)$$

Аналогично находятся распределения температур для течения вязкой жидкости с произвольными числами Рейнольдса в конфузоре и для других частных случаев.

Поступило
6 V 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Современное состояние проблем аэрогидромеханики вязкой жидкости, 1948.
² А. М. Файнзильбер, ДАН, 48, № 8 (1945).