

А. Б. ШИДЛОВСКИЙ

О КРИТЕРИИ АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ НЕЗАВИСИМОСТИ ЗНАЧЕНИЙ ОДНОГО КЛАССА ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 16 XI 1954)

В статье ⁽¹⁾ мною дано обобщение теоремы Зигеля ⁽³⁾ об алгебраической независимости значений в алгебраических точках совокупности E -функций*, являющейся решением системы линейных дифференциальных уравнений.

Оказывается, можно установить необходимое и достаточное условие справедливости этого предложения. Имеет место:

Основная теорема. Пусть совокупность E -функций $f_1(z), \dots, f_m(z)$ является решением системы из t линейных дифференциальных уравнений первого порядка

$$y'_k = Q_{k,0}(z) + \sum_{i=1}^m Q_{k,i}(z) y_i, \quad k = 1, \dots, t, \quad (1)$$

коэффициенты которых $Q_{k,i}(z)$, $k = 1, \dots, t$, $i = 0, \dots, m$, — рациональные функции от z с алгебраическими числовыми коэффициентами, а α — любое алгебраическое число, отличное от нуля и полюсов всех функций $Q_{k,i}(z)$.

Тогда для того, чтобы t чисел $f_1(\alpha), \dots, f_m(\alpha)$ были алгебраически независимы, необходимо и достаточно, чтобы функции $f_1(z), \dots, f_m(z)$ были алгебраически независимы над полем рациональных функций от z .

Зигель установил справедливость своей теоремы при выполнении некоторого аналитического условия нормальности совокупностей произведений степеней E -функций $f_1(z), \dots, f_m(z)$, причем в случае, когда система (1) однородна. Это условие, являясь лишь достаточным условием выполнения теоремы, накладывает слишком большие ограничения на исследуемые функции и поэтому позволило Зигелю приложить свою теорему лишь к функциям, являющимся решениями линейных однородных дифференциальных уравнений порядка не выше 2-го. При проверке условия нормальности для функций, удовлетворяющих дифференциальным уравнениям порядка выше 2-го, до сих пор встают непреодолимые трудности. На это указывал и сам Зигель.

Наша теорема ⁽¹⁾, в которой условие нормальности было заменено на менее стеснительное, но также достаточное условие неприводимости произведений степеней исходных E -функций, позволило распространить теорему Зигеля на случай, когда совокупность E -функций удовлетворяет системе линейных неоднородных дифференциальных урав-

* Определение E -функции дано в ⁽¹⁾.

нений, и применить ее к конкретным функциям, являющимся решениями линейных дифференциальных уравнений 3-го и 4-го порядков.

Сформулированная выше теорема не только до конца решает рассматриваемую задачу, но и позволяет успешно применять ее к конкретным E -функциям, удовлетворяющим линейным дифференциальным уравнениям любого порядка k . Проверка алгебраической независимости совокупности E -функций над полем рациональных функций не представляет тех трудностей, как проверка условий нормальности и неприводимости, так как последние накладывают ограничения на алгебраические связи не только между самими E -функциями, но и всеми функциями фундаментальной системы решений системы (1). Существует ряд разработанных методов, которые позволяют устанавливать алгебраическую независимость целых функций.

Из основной теоремы непосредственно следует:

Теорема 1. Пусть E -функция $f(z)$ трансцендентна и является решением линейного дифференциального уравнения 1-го порядка

$$P(z)y' + Q(z)y = R(z),$$

где $P(z)$, $Q(z)$ и $R(z)$ — многочлены от z с алгебраическими числовыми коэффициентами, а α — алгебраическое число, отличное от нуля и нулей многочлена $P(z)$.

Тогда число $f(\alpha)$ трансцендентно.

В частности, показательная функция e^z удовлетворяет уравнению $y' = y$. Поэтому число e^α трансцендентно при любом алгебраическом $\alpha \neq 0$.

Далее, функция

$$\varphi_\lambda(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(\lambda+1) \dots (\lambda+n)}, \quad \lambda \neq -1, -2, \dots, \quad (2)$$

является при рациональном λ E -функцией и удовлетворяет уравнению

$$y' + \left(\frac{\lambda}{z} - 1\right)y = \frac{\lambda}{z}.$$

Значит, число $\varphi_\lambda(\alpha)$ трансцендентно при всяком алгебраическом $\alpha \neq 0$ и любом рациональном $\lambda \neq -1, -2, \dots$

Известная теорема Линдемана также просто следует из общей теоремы.

Доказательство всех результатов Зигеля ^(2,3) относительно функций Бесселя при помощи нашей основной теоремы значительно сокращается. Отпадает необходимость проверки алгебраической независимости различных решений дифференциального уравнения Бесселя и доказательства нормальности произведений степеней рассматриваемых функций. Аналогично упрощается доказательство теорем 1—7 ⁽¹⁾. Кроме того все эти теоремы теперь нетрудно обобщить.

Относительно функций $\varphi_\lambda(z)$ (2) имеет место:

Теорема 2. Пусть λ_0 — неотрицательное целое рациональное число; $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ — дробные рациональные числа такие, что разности $\lambda_i - \lambda_j$, $1 \leq i < j \leq m$, не являются целыми; $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ — алгебраические числа, попарно различные и отличные от нуля; $\beta_1, \dots, \beta_n$ — алгебраические числа, линейно независимые над полем рациональных чисел.

Тогда $(m+1)n$ чисел $\varphi_{\lambda_0}(\beta_i)$ и $\varphi_{\lambda_j}(\alpha_i)$, $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, m$, алгебраически независимы.

Эта теорема есть прямое обобщение теоремы Линдемана. Последняя следует из нее при $\lambda_0 = 0$ и $m = 0$.

Обозначим $\varphi_{\lambda,0}(z) = \varphi_{\lambda}(z)$ и

$$\varphi_{\lambda,l}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(\lambda+1) \cdots (\lambda+n)(\mu_1+n) \cdots (\mu_l+n)},$$

$$\lambda, \mu_i = -1, -2, \dots, \quad i = 1, \dots, l, \quad l = 1, \dots, k,$$

причем в этой сумме слагаемое, соответствующее $n = 0$, всегда считаем равным единице.

Теорема 3. Пусть $\lambda, \mu_1, \dots, \mu_k$ — рациональные числа, каждое из которых не является целым отрицательным, такие, что разности $\mu_l - \lambda, l = 1, \dots, k$, не являются целыми положительными, а α — любое алгебраическое число, отличное от нуля.

Тогда $k+1$ чисел $\varphi_{\lambda,l}(\alpha), l = 0, \dots, k$, алгебраически независимы.

Теоремы 2 и 3 содержатся в более общей теореме. Поставим каждому числу $\lambda_j, j = 0, \dots, t$, в соответствие прямоугольную матрицу

$$\|\mu_{j,l,s}\|, \quad l = 1, \dots, k, \quad s = 1, \dots, t,$$

где числа λ_j и $\mu_{j,l,s}$ не являются отрицательными целыми рациональными, и обозначим

$$\varphi_{\lambda_j,l,s}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(\lambda_j+1) \cdots (\lambda_j+n)(\mu_{j,l,s}+n) \cdots (\mu_{j,l,s}+n)}.$$

Теорема 4. Пусть λ_0 — неотрицательное целое рациональное число; числа $\lambda_j, j = 1, \dots, t$, — дробные рациональные; $\mu_{j,l,s}, j = 0, \dots, t, l = 1, \dots, k, s = 1, \dots, t$ — рациональные числа, не являющиеся целыми отрицательными. При этом все разности: $\lambda_i - \lambda_j, 1 \leq i < j \leq t$; $\mu_{j,l,s_1} - \mu_{j,l,s_2}, l_1, l_2 = 1, \dots, k, s_1, s_2 = 1, \dots, t, s_1 \neq s_2, j = 0, \dots, t$; $\mu_{0,l,s} - \lambda_j, l = 1, \dots, k, s = 1, \dots, t, j = 1, \dots, t$, не являются целыми, а разности $\mu_{j,l,s} - \lambda_j, l = 1, \dots, k, s = 1, \dots, t, j = 1, \dots, t$, не являются целыми положительными.

Далее, $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ — алгебраические числа, попарно различные и отличные от нуля, а $\beta_1, \dots, \beta_n$ — алгебраические числа, линейно независимые над полем рациональных чисел.

Тогда $(t+1)n(kt+1)$ чисел $\varphi_{\lambda_0}(\beta_i), \varphi_{\lambda_j}(\alpha_i), \varphi_{\lambda_0,l,s}(\alpha_i)$ и $\varphi_{\lambda_j,l,s}(\alpha_i), i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, t, l = 1, \dots, k, s = 1, \dots, t$, алгебраически независимы.

Рассмотрим функцию

$$K_{\lambda}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! (\lambda+1) \cdots (\lambda+n)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n}, \quad \lambda \neq -1, -2, \dots,$$

и некоторые связанные с ней функции. Обозначим

$$K_{\lambda,l} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! (\lambda+1) \cdots (\lambda+n)(\mu_1+n) \cdots (\mu_l+n)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n},$$

$\lambda \neq -1, -2, \dots, \mu_i \neq 0, -1, -2, \dots, i = 1, \dots, l, l = 1, \dots, k$, причем в этой сумме слагаемое, соответствующее $n = 0$, всегда считаем равным единице, $H_{\lambda,0}(z) = K_{\lambda}(z)$ и

$$H_{\lambda,l}(z) = z^{-\mu_l} e^z \int^z t^{\mu_l-1} e^{-t} H_{\lambda,l-1}(t) dt, \quad l = 1, \dots, k,$$

где символ $\int^z t^{\mu-1} f(t) dt$ означает ту первообразную для функции $z^{\mu-1} f(z)$, которая получается после умножения степенного ряда целой функции $f(z)$ на $z^{\mu-1}$ и почленного интегрирования с постоянной интегрирования, равной нулю. Относительно этих функций устанавливаются следующие предложения:

Теорема 5. Пусть λ — рациональное число, $\lambda \neq \pm 1/2, -1, \pm 3/2, -2, \dots$, $\mu_1, \dots, \mu_k$ — рациональные числа, не являющиеся целыми отрицательными, такие, что разности $\mu_l - \lambda$, $l = 1, \dots, k$, не являются целыми положительными, а α — алгебраическое число, отличное от нуля.

Тогда $k + 2$ числа $K_\lambda(\alpha)$, $K'_\lambda(\alpha)$, $K_{\lambda,l}(\alpha)$, $l = 1, \dots, k$, алгебраически независимы.

Теорема 6. Пусть λ — рациональное число, $\lambda \neq \pm 1/2, -1, \pm 3/2, -2, \dots$, $\mu_1, \dots, \mu_k$ — рациональные числа, $\mu_l \neq 0, -1, -2, \dots$, $l = 1, \dots, k$, а α — алгебраическое число, отличное от нуля.

Тогда $k + 3$ числа e^α , $K_\lambda(\alpha)$, $K'_\lambda(\alpha)$, $H_{\lambda,l}(\alpha)$, $l = 1, \dots, k$, алгебраически независимы.

Теоремы 5 и 6 можно обобщить в том направлении, в котором теорема 4 обобщает теорему 3. Заметим, что в теоремах 3, 4, 5 и 6 основные функции являются решениями дифференциальных уравнений произвольного порядка k . Основную теорему можно применить и к другим E -функциям, удовлетворяющим линейным дифференциальным уравнениям.

Государственный педагогический институт
им. В. И. Ленина

Поступило
12 XI 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ А. Б. Шидлоўский, ДАН, 96, № 4 (1954). ² K. Siegel, Abh. Preuss. Acad. Wiss., No. 1, 70 (1929—1930). ³ K. Siegel, Transcendental Numbers, Princeton, 1949.