

МАТЕМАТИКА

Д. Ф. ХАРАЗОВ

О ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧАХ В ТЕОРИИ ОБЫКНОВЕННЫХ
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 3 XI 1954)

1. В этой заметке мы применяем опубликованные ранее результаты^(1,2) к исследованию граничных задач для уравнений вида

$$F(y) = G(y; \lambda) - f(x), \quad (1)$$

где $F(y) = \sum_{v=0}^n (p_v(x) y^{(v)})^{(v)}$; $G(y; \lambda) = \sum_{v=0}^m (q_v(x; \lambda) y^{(v)})^{(v)}$; $q_v(x; \lambda) = \sum_{l=0}^{i_v} g_{lv}(x) \lambda^l$ ($v = 0, 1, \dots, m$); $m \leq n-1$; $f(x)$ — функция, непрерывная в некотором сегменте $[a, b]$; $p_v(x)$ и $g_{lv}(x)$ функции, v раз непрерывно дифференцируемые в $[a, b]$; λ — комплексный параметр.

Рассмотрим операторы вида

$$U_i(y) = \sum_{k=0}^{2n-1} [\alpha_{ik} y^{(k)}(a) + \beta_{ik} y^{(k)}(b)] \quad (i = 1, \dots, 2n),$$

где α_{ik} и β_{ik} — вещественные числа, матрица [которых имеет ранг $2n$. Последнее условие обеспечивает линейную независимость уравнений

$$U_i(y) = 0 \quad (i = 1, \dots, 2n). \quad (2)$$

Для любых u и v , $2n$ раз дифференцируемых в $[a, b]$, имеет место формула⁽³⁾

$$\int_a^b [vF(u) - uF(v)] dx = \left[\sum_{v=1}^n \sum_{i, k=0}^{i+k=v-1} (-1)^i \{ (p_v(x) u^{(v)})^{(k)} v^{(i)} - (p_v(x) v^{(v)})^{(k)} u^{(i)} \} \right]_a^b. \quad (3)$$

Аналогично, для u и v , $2m$ раз дифференцируемых в $[a, b]$:

$$\begin{aligned} & \int_a^b [vG(u; \lambda) - uG(v; \lambda)] dx = \\ & = \left[\sum_{v=1}^m \sum_{i, k=0}^{i+k=v-1} (-1)^i \{ (q_v(x; \lambda) u^{(v)})^{(k)} v^{(i)} - (q_v(x; \lambda) v^{(v)})^{(k)} u^{(i)} \} \right]_a^b. \end{aligned} \quad (4)$$

В дальнейшем считаем выполненными следующие условия:

1) для любой $2n$ раз дифференцируемой в $[a, b]$ функции $u \neq 0$, удовлетворяющей условиям (2), $\int_a^b uF(u) dx > 0$ (или $\int_a^b uF(u) dx < 0$);

2) для любых функций u и v , имеющих на концах $[a, b]$ производные до $(2n-1)$ -го порядка, удовлетворяющих условиям (2),

$$\left[\sum_{v=1}^n \sum_{i, k=1}^{i+k=v-1} (-1)^i \{ (p_v(x) u^{(v)})^{(k)} v^{(i)} - (p_v(x) v^{(v)})^{(k)} u^{(i)} \} \right]_a^b = 0, \quad (5)$$

и для любого λ

$$\left[\sum_{v=1}^m \sum_{i, k=0}^{i+k=v-1} (-1)^i \{ (q_v(x; \lambda) u^{(v)})^{(k)} v^{(i)} - (q_v(x; \lambda) v^{(v)})^{(k)} u^{(i)} \} \right]_a^b = 0. \quad (6)$$

Условия 1) и 2) выполнены, если, например, $(-1)^v p_v(x) \geq 0$ (или $(-1)^v p_v(x) \leq 0$), $v = 0, 1, \dots, n$, а уравнения (2) имеют вид $y^{(k)}(a) = y^{(k)}(b) = 0$ ($k = 0, 1, \dots, n-1$).

Рассмотрим граничную задачу: найти в сегменте $[a, b]$ решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям (2). Эту задачу будем называть задачей М. В силу условий 1) и 2), задача М эквивалентна интегро-дифференциальному уравнению вида

$$u(x) = \int_a^b H(x, y) G(u(y); \lambda) dy - \int_a^b H(x, y) f(y) dy, \quad (7)$$

где $H(x, y)$ — симметрическое положительное (или отрицательное) определенное ядро, представляющее собой функцию Грина оператора $F(y)$, соответствующую условиям (2).

2. Рассмотрим следующие интегральные уравнения:

$$v(x) = \int_a^b K(x, y; \lambda) v(y) dy - \int_a^b H(x, y) f(y) dy, \quad (8)$$

$$w(x) = \int_a^b K(y, x; \lambda) w(y) dy - f(x), \quad (9)$$

где

$$K(x, y; \lambda) = G(H(x, y); \lambda) = \sum_{l=0}^t A_l(x, y) \lambda^l; \quad t = \max_{0 \leq v \leq m} t_v;$$

$$A_l(x, y) = \sum_{v=0}^m \left(h_{lv}(y) \frac{\partial^v H(x, y)}{\partial y^v} \right)^{(v)}; \quad h_{lv}(y) = \begin{cases} g_{lv}(y), & l \leq t_v; \\ 0, & l > t_v; \end{cases}$$

$$l = 0, 1, \dots, t, \quad v = 0, 1, \dots, m.$$

Ядро $K(x, y; \lambda)$ при любом λ симметризуемо справа функцией $H(x, y)$.

Лемма 1. Если $u_0(x)$ — решение задачи М при $\lambda = \lambda_0$, то $w_0(x) = F(u_0(x))$ — решение уравнения (9) при том же $\lambda = \lambda_0$.

Лемма 2. Если $w_0(x)$ — решение уравнения (9) при $\lambda = \lambda_0$, то

$$u_0(x) = \int_a^b H(x, y) w_0(y) dy \quad (10)$$

есть решение задачи М при том же $\lambda = \lambda_0$.

Назовем собственным значением задачи М такое значение λ , при котором однородная задача, соответствующая задаче М ($f \equiv 0$), имеет нетривиальные решения, называемые собственными функциями.

Из лемм 1 и 2 вытекает, что множества собственных значений задачи М и уравнения

$$w(x) = \int_a^b K(y, x; \lambda) w(y) dy \quad (11)$$

совпадают и, более того, если $u_0(x)$ — собственная функция задачи М, соответствующая значению $\lambda = \lambda_0$, то $w_0(x) = F(u_0(x))$ — собственная функция уравнения (11) при $\lambda = \lambda_0$; если же $w_0(x)$ — собственная функция уравнения (11), соответствующая значению $\lambda = \lambda_0$, то функция (10) — собственная функция задачи М при том же $\lambda = \lambda_0$.

3. В пространстве Лебега $L^2(a, b)$ рассмотрим интегральные операторы

$$Hu = \int_a^b H(x, y) u(y) dy, \quad A_k u = \int_a^b A_k(y, x) u(y) dy \quad (k = 0, 1, \dots, t)$$

и запишем уравнения (9) и (11) в виде

$$w - \sum_{h=0}^t \lambda^h A_h w = -f, \quad w - \sum_{h=0}^t \lambda^h A_h w = 0. \quad (12)$$

Легко видеть, что операторы A_k и H удовлетворяют всем требованиям, наложенным в § 1 работы (1), где в качестве пространства X надо рассматривать $L^2(a, b)$. На основании лемм предыдущего параграфа и результатов работы (1) при исследовании задачи М получаем следующие результаты:

Теорема 1. Если t — нечетное число и ядро $A_0(x, y)$ не имеет положительных собственных значений ≤ 1 , то существует, по крайней мере, одно вещественное собственное значение задачи М.

Теорема 2. Если t — четное число, $A_0(x, y)$ не имеет положительных собственных значений ≤ 1 , а ядро $A_t(x, y)$ имеет хотя бы одно положительное собственное значение, то существует, по крайней мере, одно вещественное собственное значение задачи М.

Теорема 3. Если единица не есть собственное значение ядра $A_0(x, y)$, то множество собственных значений задачи М не имеет предельных точек в конечной части плоскости λ .

Теорема 4. Если $A_0(x, y)$ не имеет положительных собственных значений ≤ 1 и все ядра $A_k(x, y)$ ($k = 2, 3, \dots, t$) имеют только положительные собственные значения, то задача М не имеет невещественных собственных значений λ , удовлетворяющих условиям $0 < \arg \lambda \leq \pi/(t-1)$, $2\pi - \pi/(t-1) \leq \arg \lambda < 2\pi$.

Теорема 5. Если $A_0(x, y)$ не имеет положительных собственных значений ≤ 1 и все ядра $(-1)^k A_k(x, y)$ ($k = 2, 3, \dots, t$) имеют только положительные собственные значения, то задача М не имеет невещественных собственных значений λ , удовлетворяющих условиям $\pi - \pi/(t-1) \leq \arg \lambda < \pi$, $\pi < \arg \lambda \leq \pi + \pi/(t-1)$.

Границы области несуществования невещественных собственных значений, полученные нами, нельзя расширить.

4. Рассмотрим частный случай задачи М, который назовем задачей M_2 , соответствующий условиям $h_{lv}(y) \equiv 0$, $l = 0, 3, 4, \dots, t$; $v = 0, 1, \dots, m$. Тогда $A_l(x, y) \equiv 0$ для $l = 0, 3, 4, \dots, t$, и уравнения (12) примут вид

$$w - \lambda A_1 w - \lambda^2 A_2 w = -f, \quad w - \lambda A_1 w - \lambda^2 A_2 w = 0. \quad (13)$$

В силу теорем 7 и 8 работы (1) имеют место:

Теорема 6. Если ядро $A_2(x, y)$ имеет только отрицательные собственные значения, то задача M_2 имеет, по крайней мере, одно вещественное собственное значение.

Теорема 7. Если $A_2(x, y)$ имеет только отрицательные собственные значения и все собственные значения $A_1(x, y)$ отрицательны (или положительны), то все вещественные собственные значения задачи M_2 отрицательны (или положительны), а вещественные части комплексных собственных значений неположительны (или неотрицательны).

Допустим теперь, что ядро $A_2(x, y)$ имеет только положительные собственные значения. В этом случае задачу M_2 назовем задачей M_2^+ . Тогда операторы A_1, A_2 и H удовлетворяют всем требованиям, наложенным в § 1 работы (2), на основании результатов которой получаются следующие предложения:

Теорема 8. Задача M_2^+ имеет бесконечное множество собственных значений (лишь вещественных, в силу теоремы 4) $|\lambda_1| \leq |\lambda_2| \leq \dots \leq |\lambda_n| \leq \dots$, $\lim_{n \rightarrow \infty} |\lambda_n| = +\infty$, которым соответствуют собственные функции $u_1(x), u_2(x), \dots, u_n(x), \dots$, удовлетворяющие условиям $\int_a^b F(u_i(x)) u_k(x) dx + \lambda_i \lambda_k \int_a^b A_2(x, y) F(u_i(x)) u_k(y) dx dy = \delta_{ik}$ ($i, k = 1, 2, \dots$).

Отметим, что при помощи метода, указанного в работе (2), мы найдем все собственные значения задачи M_2^+ и полную систему ее собственных функций.

Теорема 9. Если λ не есть собственное значение M_2^+ , то ее единственное решение почти всюду в $[a, b]$ представимо в виде

$$u(x) = - \int_a^b H(x, y) f(y) dy + \lambda \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f_k}{\lambda_k - \lambda} u_k(x), \quad (14)$$

где $f_k = \int_a^b f(x) u_k(x) dx$ ($k = 1, 2, \dots$), а ряд справа ограниченно сходится в $[a, b]$.

5. Пусть теперь дополнительно $h_{2\nu}(x) \equiv 0$ для $\nu = 0, 1, \dots, m$; в этом частном случае задачу M_2 будем называть задачей M_1 (эту задачу изучал Э. Камке (4)). В этом случае выполняются все требования § 5 работы (2), если принять за L_B (см. (2), § 5) пространство C функций, непрерывных в $[a, b]$, и имеет место

Теорема 10. Если λ не есть собственное значение задачи M_1 , то ее единственное решение в $[a, b]$ представимо в виде (14), где ряд справа равномерно сходится в $[a, b]$.

Тбилисский математический институт
им. А. М. Размалзе
Академии наук Груз.ССР

Поступило
1 VII 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Д. Ф. Харазов, ДАН, 91, № 6 (1953). ² Д. Ф. Харазов, ДАН, 91, № 5 (1953). ³ Э. Айнс, Обыкновенные дифференциальные уравнения. Харьков, 1939. ⁴ Е. Камке, Math. Zs., 46, Н. 2 и 3 (1940).