

МАТЕМАТИКА

А. И. ПОЛАК

**О ФУНКЦИЯХ, НЕ ПРИНИМАЮЩИХ ПОСТОЯННЫХ ЗНАЧЕНИЙ
НА СВЯЗНЫХ МНОГОТОЧЕЧНЫХ МНОЖЕСТВАХ**

(Представлено академиком М. А. Лаврентьевым 10 XI 1954)

Главной целью этой заметки является исследование некоторых свойств тех непрерывных функций комплексного переменного, которые не принимают постоянных значений ни на каком связном множестве в области задания этих функций. Однако этот результат возникает как частный случай более общих соображений о непрерывных отображениях локально-компактных пространств в локально-связные пространства с нульмерными полными прообразами точек этих пространств. Нульмерность множеств мы определяем как обычно: множество, рассматриваемое как топологическое пространство, считают нульмерным, если у каждой точки существуют сколь угодно малые окрестности с пустой границей.

В работе имеется в виду указать прием, при помощи которого могут быть отыскиваемы все нули уравнения $f(z) = a$, где $f(z)$ — функция указанного типа, посредством определенного аппроксимативного процесса. Аппроксимативным аппаратом, которым мы будем пользоваться, послужит особая система функций, определенных в данной области G и которые мы будем называть вполне открытыми функциями. Эти функции суть непрерывные функции и, кроме того, обладают теми же свойствами сохранения области, как и аналитические функции. Таким образом, эти функции не только переводят всякое открытое в G множество в множество, открытое в $f(G)$, как и полагается открытым отображениям, но кроме того, само множество $f(G)$ есть множество, открытое в плоскости w . Благодаря этому образ всякого открытого в G множества есть множество, открытое во всей плоскости z .

Теорема 1. Пусть непрерывная в области G на плоскости z функция $f(z)$ не принимает постоянного значения ни на каком связном подмножестве области G . Тогда, если $\varphi_n(z)$ есть последовательность вполне открытых в G функций, равномерно сходящихся в G к функции $f(z)$, то можно утверждать, что если для каждого n существует хоть одно решение уравнения $\varphi_n(z) = a$ в области G , то совокупность всех решений уравнения $f(z) = a$, лежащих в области G , совпадает с совокупностью пределов всех сходящихся внутри* G последовательностей $\{z_n\}$, где каждое z_n — решение соответствующего уравнения $\varphi_n(z) = a$.

Эта теорема есть частный случай значительно более общего предложения.

* Последовательность сходится внутри G , если ее предел лежит в G .

Будем рассматривать непрерывные отображения некоторой области G метрического локально-компактного пространства R в метрическое пространство R' . Так же как и в случае функций, заданных на плоскости, несколько видоизменим обычное понятие открытого отображения: мы будем называть отображение f области G в R' вполне открытым, если кроме обычного условия: образы открытых в G множеств открыты в $f(G)$, выполнено условие: само $f(G)$ открыто в R' .

Теорема 2. Пусть непрерывное отображение f области G локально-компактного пространства R в локально-связное пространство R' обладает тем свойством, что полный прообраз $f^{-1}(y)$ не содержит никакого связного подмножества ($y \in R'$). Тогда, если к f равномерно сходится последовательность вполне открытых в G отображений f_n , то полные прообразы $f_n^{-1}(y)$, $y \in R'$, сходятся, коль скоро они не пусты, к полным прообразам $f^{-1}(y)$, т. е. имеет место $\lim f_n^{-1}(y) = f^{-1}(y)$.

Доказательство. Прежде всего заметим, что, в силу локальной компактности G , каждое множество $f^{-1}(y)$, будучи замкнутым, есть также локально-компактное пространство. Но для локально-компактных пространств вполне-несвязность эквивалентна ⁽¹⁾ нульмерности. Значит, все полные прообразы $f^{-1}(y)$ суть нульмерные множества.

Предположим теперь, что сходимость прообразов не имеет места. Значит, найдется точка $y_0 \in f(G)$ такая, что $\lim f_n^{-1}(y_0) \neq f^{-1}(y_0)$. В силу равномерной сходимости f_n верхний предел $f_n^{-1}(y_0)$, если он не пуст, принадлежит к $f^{-1}(y_0)$. Действительно, предполагая противное, найдем точку x_0 , в которой сходится последовательность точек x_m , $x_m \in f_m^{-1}(y_0)$, причем $x_0 \notin f^{-1}(y_0)$. Значит, $f(x_0) \neq y_0$. Но $f_m(x_m) \rightarrow y_0$. Отсюда $\rho(f(x_m), f_m(x_m)) > \delta$, где δ — некоторое положительное число. Это противоречит равномерной сходимости f_n . Значит, из предположения $\lim f_n^{-1}(y_0) \neq f^{-1}(y_0)$ следует либо пустота $\overline{\lim f_n^{-1}(y_0)}$, либо существование на $f^{-1}(y_0)$ точки, не принадлежащей $\lim f_n^{-1}(y_0)$. Но в том и другом случае найдется $x_0 \in f^{-1}(y_0)$ и такое ε , что для этого ε можно найти подпоследовательность $\{f_m\}$ такую, что ни одно $f_m^{-1}(y_0)$ не пересекается с ε -окрестностью точки x_0 .

Выберем теперь окрестность $U(x_0)$ таким образом, чтобы имело место: 1) замыкание $\bar{U}(x_0)$ компактно и лежит в G ; 2) $\bar{U}(x_0) \subset U_\varepsilon(x_0)$; 3) граница $U(x_0)$ не содержит ни одной точки множества $f^{-1}(y_0)$.

Такой выбор окрестности возможен в силу предположения о локальной компактности G и нульмерности $f^{-1}(y)$. Действительно, условие 3) немедленно следует из определения нульмерных множеств при помощи окрестностей в окружающем пространстве.

Образ границы окрестности $U(x_0)$, очевидно, компактен и не содержит y_0 . Значит, расстояние δ от y_0 до $\bar{U}(x_0) - U(x_0)$ не равно нулю. Выберем положительное число σ меньше чем $\delta/2$. Тогда найдется связная окрестность $V(y_0)$, лежащая в σ -окрестности точки y_0 . В силу равномерной сходимости f_m к f , начиная с некоторого m_0 , все $y_m = f_m(x_0)$ попадут в окрестность $V(y_0)$. Значит, для каждого $m > m_0$ в окрестности $V(y_0)$ найдется хоть одна точка из образа окрестности $U(x_0)$ при отображении f_m . Но, с другой стороны, точка y_0 в силу основного предположения не принадлежит к $f_m(U(x_0))$.

Легко видеть, что в множестве $V(y_0)$ нет ни одной точки, граничной для множества $f_m(U(x_0))$, которое представляет собой образ окрестности $U(x_0)$ при отображении f_m , если m достаточно велико.

Действительно, предполагая противное, тотчас для некоторых m^* найдем точки ξ_m , принадлежащие границе $U(x_0)$ и такие, что $f_m(\xi_m) = \eta_m$, где $\eta_m \in V(y_0)$. Но тогда $\rho[f_m(\xi_m), f(\xi_m)]$ для таких m должно быть больше $\delta/2$, что противоречит равномерной сходимости $\{f_m\}$. Множество $V(y_0)$ разбивается на два множества V_1 и V_2 . В множество V_1 входят точки, принадлежащие множеству $f_m(U(x_0))$, в V_2 входят точки, не принадлежащие $f_m(U(x_0))$ (m фиксировано и достаточно велико). Очевидно, множества V_1 и V_2 не пересекаются. Далее, ни одна точка V_2 не может быть предельной для V_1 в силу предыдущих выводов. Ни одна точка V_1 не может быть предельной для V_2 , так как $V_1 = V(y_0) \cap f_m(U(x_0))$. Оба множества $V(y_0)$ и $f(U_m)$ открыты в пространстве R' и, следовательно, V_1 открыто в $V(y_0)$. Значит, связное множество $V(y_0)$ распалось на два непересекающиеся множества, удовлетворяющих условию Хаусдорфа, что невозможно. Значит, наше исходное предположение неверно.

Теорема 2 доказана, тем самым установлена справедливость и теоремы 1.

В заключение заметим, что предположение о нульмерности прообразов в теоремах 1 и 2 существенно. Если не требовать этого условия, то немедленно могут быть построены тривиальные примеры равномерно сходящихся последовательностей открытых функций таких, что сходимость полных прообразов не будет иметь места по крайней мере для некоторых w .

Пусть теперь все рассматриваемые функции суть функции, аналитические в области G .

Следствие теоремы 1. Пусть левая часть уравнения $f(z) = 0$ есть функция, определенная и аналитическая в области G . Если удалось равномерно аппроксимировать $f(z)$ последовательностью аналитических функций $\varphi_n(z)$, каждая из которых обращается в нуль хотя в одной точке области G , то совокупность всех решений уравнения $f(z) = 0$ совпадает с множеством пределов всех сходящихся внутри G последовательностей $\{z_n\}$, где каждое z_n есть решение соответствующего уравнения $\varphi_n(z) = 0$.

Это следствие можно, конечно, получить при помощи обычного аппарата теории функций, опираясь, таким образом, на аналитичность функций. То обстоятельство, что этот результат вытекает из теоремы 1, показывает его общую теоретико-множественную природу.

Московский
физико-технический институт

Поступило
1 XI 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1 В. Гуревич, Г. Волмэн, Теория размерности, 1948.

* Такие числа m образуют бесконечную последовательность.