

А. П. ЕРШОВ

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ ОБРАЩЕНИЯ МАТРИЦ

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 12 XI 1954)

Основу предлагаемого метода составляет следующая лемма:

Лемма. Пусть $A \{a_{ij}\}$ — неособенная матрица порядка n и пусть строятся по индукции три последовательности матриц $A^{(m)} \{a_{ij}^{(m)}\}$, $X^{(m)} \{x_{ij}^{(m)}\}$ и $B^{(m+1)} \{b_{ij}^{(m+1)}\}$ ($m = 1, \dots, n$) таких, что $A^{(0)} = E$, $X^{(0)} = E$, $B^{(1)} = A - E$, где $E \{\delta_{ij}\}$ — единичная матрица, и

$$a_{ij}^{(m)} = \begin{cases} a_{ij}, & i \leq m; \\ \delta_{ij}, & i > m; \end{cases} \quad (I)$$

$$x_{ij}^{(m)} = x_{ij}^{(m-1)} - \frac{x_{im}^{(m-1)} b_{mj}^{(m)}}{1 + b_{mm}^{(m)}} \quad (i, j = 1, \dots, n); \quad (II)$$

$$b_{ij}^{(m+1)} = b_{ij}^{(m)} - \frac{b_{im}^{(m)} b_{mj}^{(m)}}{1 + b_{mm}^{(m)}}. \quad (III)$$

Тогда

$$X^{(m)} = (A^{(m)})^{-1} \quad (IV)$$

и, в частности,

$$X^{(n)} = (A^{(n)})^{-1} = A^{-1}.$$

Доказательство. 1°. Пусть $A \{a_{ij}\}$ и $X \{x_{ij}\}$ — известные взаимно-обратные матрицы, т. е.

$$AX = E, \quad (1)$$

и пусть A^* — матрица с элементами

$$a_{ij}^* = \begin{cases} a_{ij}, & i \neq k; \\ a_{kj} + \Delta a_{kj}, & i = k, \end{cases}$$

где Δa_{kj} ($j = 1, \dots, n$) — произвольные числа, образующие вектор ΔA_k . Тогда, если A^* окажется неособенной матрицей, для матрицы $X^* \{x_{ij}^*\}$, обратной к A^* , из уравнения (1) и уравнения

$$A^* X^* = A^* (X + \Delta X) = E \quad (2)$$

можно получить простыми выкладками, что

$$x_{ij}^* = x_{ij} + \Delta x_{ij} = x_{ij} - \frac{x_{ik} (\Delta A_k X_j)}{1 + (\Delta A_k X_k)} \quad (i, j = 1, \dots, n), \quad (3)$$

где X_j — j -й столбец матрицы X .

2°. Выражение (I) можно представить в виде следующего рекуррентного соотношения:

$$\alpha_{ij}^{(m)} = \begin{cases} \alpha_{ij}^{(m-1)}, & i \neq m; \\ \alpha_{mj}^{(m-1)} + (a_{mj} - \delta_{mj}), & i = m. \end{cases} \quad (4)$$

Тогда, считая, что числа $a_{mj} - \delta_{mj}$ ($j = 1, \dots, n$) образуют вектор $\tilde{A}_m = A_m - E_m$, где A_m и E_m — m -е строки матриц A и E , соответственно, и обозначив через $X^{(m)} \{x_{ij}^{(m)}\}$ матрицу, обратную к $A^{(m)}$, получим из (3), что

$$x_{ij}^{(m)} = x_{ij}^{(m-1)} - \frac{x_{im}^{(m-1)} (\tilde{A}_m X_j^{(m-1)})}{1 + (\tilde{A}_m X_m^{(m-1)})} \quad (i, j = 1, \dots, n; \quad m = 1, \dots, n). \quad (5)$$

3°. Сравнивая (5) и (II), видим, что для доказательства леммы достаточно показать, что

$$(\tilde{A}_i X_j^{(m-1)}) = b_{ij}^{(m)} \quad (i, j = 1, \dots, n; \quad m = 1, \dots, n). \quad (6)$$

Для $m = 0$

$$(\tilde{A}_i X_j^{(0)}) = \sum_{k=1}^n (a_{ik} - \delta_{ik}) \delta_{kj} = a_{ij} - \delta_{ij} = b_{ij}^{(1)}.$$

Пусть для $m-1$ $(\tilde{A}_i X_j^{(m-1)}) = b_{ij}^{(m)}$. Тогда для m

$$\begin{aligned} (\tilde{A}_i X_j^{(m)}) &= \left(\tilde{A}_i \left[X_j^{(m-1)} - \frac{X_m^{(m-1)} (\tilde{A}_m X_j^{(m-1)})}{1 + (\tilde{A}_m X_m^{(m-1)})} \right] \right) = \\ &= (\tilde{A}_i X_j^{(m-1)}) - \frac{(\tilde{A}_i X_m^{(m-1)}) (\tilde{A}_m X_j^{(m-1)})}{1 + (\tilde{A}_m X_m^{(m-1)})} = b_{ij}^{(m)} - \frac{b_{im}^{(m)} b_{mj}^{(m)}}{1 + b_{mm}^{(m)}} = b_{ij}^{(m+1)}. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Легко видеть, далее, что матрица $X^{(m)}$ имеет следующее строение:

$$x_{ij}^{(m)} = \begin{cases} x_{ij}^{(m)}, & i \leq m; \\ \delta_{ij}, & i > m. \end{cases}$$

В то же время из (II) и (III) следует, что после того как построены матрицы $X^{(m)}$ и $B^{(m+1)}$, для построения матриц $X^{(m+1)}$, $X^{(m+2)}$, ..., $X^{(n)}$ потребуется только $n - m$ последних строк матрицы $B^{(m+1)}$. Поэтому предлагаемой вычислительной схеме обращения матрицы можно придать следующий вид.

Пусть A — неособенная матрица и пусть по индукции строится последовательность матриц $S^{(0)}$, $S^{(1)'}$, $S^{(1)}$, ..., $S^{(n)'}$, $S^{(n)}$, такая, что $S^{(0)} = A - E$,

$$s_{ij}^{(m)'} = \begin{cases} s_{ij}^{(m-1)}, & i \neq m; \\ \delta_{mj}, & i = m; \end{cases} \quad (i, j = 1, \dots, n; \quad m = 1, \dots, n) \quad (7)$$

$$s_{ij}^{(m)} = s_{ij}^{(m)'} - \frac{s_{im}^{(m)'} s_{mj}^{(m-1)}}{1 + s_{mm}^{(m-1)}}. \quad (8)$$

Тогда $S^{(n)} = X^{(n)} = A^{-1}$.

Действительно, из (7) и (8) вытекает, что $S^{(m)}$ имеет своими первыми m строками первые m строк матрицы $X^{(m)}$, а последними $n-m$ строками — последние $n-m$ строк матрицы $B^{(m+1)}$, откуда и следует, что

$$S^{(n)} = X^{(n)} = A^{-1}.$$

Хотя предлагаемый метод основан на другой идее, нежели методы обращения матриц, опирающиеся на известный алгоритм последовательного исключения неизвестных, он с ними тесно связан в вычислительном отношении. В частности, между элементами матриц $S^{(m)}$ и $C^{[m]}$ (матрицы, получающейся после m -го этапа обращения матрицы методом перекрестного умножения⁽¹⁾) имеют место следующие соотношения:

$$s_{ij}^{(m)} = \begin{cases} c_{i-m+n, j-m+n}^{[m]}, & i \leq m, \quad j \leq m; \\ -c_{i-m+n, j-m}^{[m]}, & i \leq m, \quad j > m; \\ -c_{i-m, j-m+n}^{[m]}, & i > m, \quad j \leq m; \\ c_{i-m, j-m}^{[m]} - \delta_{ij}, & i > m, \quad j > m. \end{cases} \quad (9)$$

Эти соотношения получаются из сопоставления формулы (6) в работе⁽¹⁾ с формулами, выражающими элементы матрицы $S^{(m)}$ через миноры исходной матрицы A :

$$s_{ij}^{(m)} \cdot \Delta_m = \begin{cases} (-1)^{i+j} M_A \begin{pmatrix} 1, \dots, j-1, j+1, \dots, m \\ 1, \dots, i-1, i+1, \dots, m \end{pmatrix}, & i \leq m, \quad j \leq m; \\ (-1)^{i+m+1} M_A \begin{pmatrix} 1, 2, \dots, \dots, m \\ 1, \dots, i-1, i+1, \dots, m, j \end{pmatrix}, & i \leq m, \quad j > m; \\ (-1)^{j+m} M_A \begin{pmatrix} 1, \dots, j-1, j+1, \dots, m, i \\ 1, 2, \dots, \dots, m \end{pmatrix}, & i > m, \quad j \leq m; \\ M_A \begin{pmatrix} 1, \dots, m, i \\ 1, \dots, m, j \end{pmatrix}, & i > m, \quad j > m, \end{cases} \quad (10)$$

где Δ_m — главный минор m -го порядка матрицы A . Эти выражения можно получить из (IV) и (6), исходя из известного представления элементов обратной матрицы через алгебраические дополнения элементов прямой матрицы.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
11 XI 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ П. Д. Гроссман, Усп. матем. наук, 5, в. 3, 87 (1950).