

А. А. ГОНЧАР

О НАИЛУЧШИХ ПРИБЛИЖЕНИЯХ РАЦИОНАЛЬНЫМИ ФУНКЦИЯМИ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 13 XI 1954)

Рассмотрим класс рациональных функций n -го порядка

$$R_n(x) = \frac{P_m(x)}{Q_k(x)}, \quad n = \max(m, k),$$

где $P_m(x)$, $Q_k(x)$ — многочлены степени m , k , соответственно.

Назовем наилучшим приближением функции $f(x)$ на отрезке $[0, 1]$ рациональными функциями n -го порядка величину:

$$R_n(f) = \inf_{\substack{R_k(x) \\ k \leq n}} \max_{0 \leq x \leq 1} |f(x) - R_k(x)|.$$

Рациональная функция, для которой нижняя грань достигается, существует и единственна ⁽¹⁾.

В настоящей заметке мы ограничимся рассмотрением наилучших приближений рациональными функциями лишь на отрезке $[0, 1]$, так как нас будет интересовать то новое по сравнению с теорией наилучших приближений многочленами, что является следствием расширения класса аппроксимирующих функций. Мы докажем несколько обратных теорем о зависимости между внутренними свойствами функции $f(x)$ и скоростью стремления к нулю $R_n(f)$.

1. Справедлива следующая теорема, показывающая, что произвольно быстрое убывание $R_n(f)$ не обеспечивает сколько-нибудь хороших дифференциальных свойств функции $f(x)$ всюду на $[0, 1]$.

Теорема 1. Пусть $\varphi(n) > 0$ и $\omega(\delta) > 0$ — произвольные монотонные функции, причем $\varphi(n) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, а $\omega(\delta) \rightarrow 0$ при $\delta \rightarrow 0$. Существует непрерывная на $[0, 1]$ функция $f(x)$ такая, что:

$$R_n(f) < \varphi(n), \quad \overline{\lim}_{\delta \rightarrow 0} \frac{\omega_f(\delta)}{\omega(\delta)} > 1,$$

где $\omega_f(\delta)$ — модуль непрерывности $f(x)$ на отрезке $[0, 1]$.

Действительно, такой функцией является

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varphi(k) \varepsilon_k}{2^k (x_k - x)},$$

$$x_n = 1 + \varepsilon_n, \quad \varepsilon_{n-1} = \delta_n = \omega^{-1} \left(\frac{1}{2} \sum_{k=n}^{\infty} \frac{\varphi(k)}{2^k} \right).$$

Отсюда, в частности, следует, что существуют функции, наилучшие приближения которых многочленами $E_n(f)$ стремятся к нулю сколь угодно медленно, в то время как $R_n(f)$ стремятся к нулю сколь угодно быстро.

Теорема 2. Если

$$R_n(f) \leq \frac{1}{n^{1+\varepsilon}},$$

где $\varepsilon > 0$ произвольно, то функция $f(x)$ дифференцируема почти всюду на отрезке $[0, 1]$.

Доказательство. Пусть $R_n(x)$ — рациональная функция, осуществляющая наилучшее приближение n -го порядка функции $f(x)$

$$f(x) = R_1(x) + \sum_{n=0}^{\infty} [R_{2^{n+1}}(x) - R_{2^n}(x)]. \quad (1)$$

Обозначим:

$$\bar{R}_n(x) = \frac{\bar{P}_n(x)}{\bar{Q}_n(x)} = R_{2^{n+1}}(x) - R_{2^n}(x).$$

Имеем:

$$|\bar{R}_n(x)| \leq |R_{2^{n+1}}(x) - f(x)| + |R_{2^n}(x) - f(x)| \leq \frac{2}{2^{n(1+\varepsilon)}} \quad (2)$$

при $x \in [0, 1]$.

Построим теперь множество E , мера которого сколь угодно близка к 1 и на котором функция $f(x)$ дифференцируема. Пусть z_k^n и ζ_k^n — нули $\bar{P}_n(x)$ и $\bar{Q}_n(x)$, соответственно. Строим последовательность интервалов Δ_k^n с центром в точках $x_k^n = \operatorname{Re} z_k^n$ и длины $\frac{1}{2^n n^2}$; если некоторые интервалы пересекаются, то заменяем их одним интервалом, представляющим собой их сумму, удлинненную с каждой стороны на половину длины их пересечения. $\bigcup_k \Delta_k^n$ обозначим через Δ^n . Аналогично, исходя из точек $\xi_k^n = \operatorname{Re} \zeta_k^n$, строим множество δ^n ,

$$\operatorname{mes} \Delta^n = \operatorname{mes} \delta^n = \frac{1}{n^2}.$$

Пусть N такое, что $2 \sum_N^{\infty} \frac{1}{n^2} < \eta$, где $\eta > 0$ — произвольное наперед заданное число. Удаляя из $[0, 1]$ множества Δ^n и δ^n , $n = N+1, N+2, \dots$, получаем множество E такое, что $\operatorname{mes} E > 1 - \eta$. Для произвольной точки $x \in E$ и $n > N$ имеем:

$$\left| \frac{\bar{P}'_n(x)}{\bar{P}_n(x)} \right| \leq \sum_{k=1}^{3 \cdot 2^n} \frac{1}{|x - z_k^n|} \leq C_1 \cdot 2^n n^2 \ln(3 \cdot 2^n) \leq C_2 \cdot 2^n n^3$$

и аналогично

$$\left| \frac{\bar{Q}'_n(x)}{\bar{Q}_n(x)} \right| \leq C_3 \cdot 2^n n^3.$$

Отсюда для $x \in E$ и $n > N$ получаем:

$$|\bar{R}'_n(x)| \leq |\bar{R}_n(x)| \left(\left| \frac{\bar{P}'_n(x)}{\bar{P}_n(x)} \right| + \left| \frac{\bar{Q}'_n(x)}{\bar{Q}_n(x)} \right| \right) \leq C_4 \frac{n^3}{2^{n\varepsilon}}. \quad (3)$$

Основываясь на оценках (2) и (3) и следуя рассуждениям Н. Н. Лузина (²), стр. 171—173), можно показать, что в равенстве

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{R_1(x+h) - R_1(x)}{h} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\bar{R}_n(x+h) - \bar{R}_n(x)}{h},$$

где $x \in E$, допустим почленный переход к пределу при $h \rightarrow 0$ под знаком суммы и, следовательно, $f(x)$ имеет на множестве E производную $f'(x)$, которая получается почленным дифференцированием ряда (1).

Так как $\text{mes } E > 1 - \eta$, где $\eta > 0$ произвольно мало, то теорема доказана.

Основываясь на соответствующих оценках и следуя рассуждениям ⁽²⁾ (примечание 82, стр. 441), можно доказать также следующую теорему:

Теорема 3. Если

$$R_n(f) \leq \frac{1}{n^{p+\varepsilon}},$$

где p — целое, $\varepsilon > 0$ произвольно, то функция $f(x)$ почти всюду на отрезке $[0, 1]$ имеет p -ю асимптотическую производную.

2. В теории наилучших приближений многочленами установлено, что

$$E_n(f) \leq Cq^n, \quad 0 < q < 1,$$

обеспечивает аналитичность $f(x)$ на $[0, 1]$. При помощи ряда вида

$$\sum_{h=0}^{\infty} \frac{A_h}{x - z_h}$$

легко построить пример функции, неаналитической ни на каком из отрезков $I \subset [0, 1]$, для которой $R_n(f)$ стремится к нулю сколь угодно быстро ⁽³⁾. Тем не менее класс функций, наилучшие приближения которых стремятся к нулю достаточно быстро, обладает важнейшим свойством класса аналитических функций — свойством единственности.

Теорема 4. Пусть $f(x)$ — непрерывная на отрезке $[0, 1]$ функция, причем

$$\lim \sqrt[n]{R_n(f)} = 0.$$

Тогда, если $f(x) = 0$ на произвольном отрезке $\Delta \subset [0, 1]$, то $f(x) \equiv 0$ на отрезке $[0, 1]$.

Доказательство. Пусть $f(x) = 0$ на Δ и $R_n(x)$ — рациональная функция, осуществляющая наилучшее приближение n -го порядка $f(x)$ на $[0, 1]$

$$|f(x) - R_n(x)| \leq C\alpha_n^n, \quad \alpha_n \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

Отсюда:

$$|R_n(x)| \leq C\alpha_n^n \quad \text{для } x \in \Delta.$$

Мы будем пользоваться следующей теоремой С. Н. Бернштейна ⁽⁴⁾: Пусть E — не разбивающий плоскость континуум. Если многочлен $P_n(z)$ удовлетворяет неравенству

$$\max_{z \in E} |P_n(z)| \leq M,$$

то на линии уровня L_R дополнения к E имеем:

$$|P_n(z)| \leq MR^n.$$

Пусть $R_n(x) = \frac{P_n(x)}{Q_n(x)}$, причем $\max_{x \in \Delta} |Q_n(x)| = 1$, $\delta \subset [0, 1]$ — произвольный отрезок. На отрезке δ найдется точка ξ_n такая, что

$$|Q_n(\xi_n)| \geq \frac{1}{R_\delta^n}; \quad (4)$$

R_δ^n не зависит от n .

С другой стороны, $\max_{x \in \Delta} |P_n(x)| \leq C \alpha_n^n$, и, следовательно,

$$\max_{x \in \delta} |P_n(x)| \leq \max_{x \in [0,1]} |P_n(x)| \leq C \alpha_n^n r_\Delta^n; \quad (5)$$

r_Δ не зависит от n .

Используя (4) и (5), получаем:

$$|R_n(\xi_n)| = \left| \frac{P_n(\xi_n)}{Q_n(\xi_n)} \right| \leq C (\alpha_n r_\Delta R_\delta)^n.$$

Ясно, что $(\alpha_n r_\Delta R_\delta)^n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ (в то же время никакая прогрессия не обеспечит этого для произвольных Δ и δ , т. е. при таком доказательстве существенно, что наилучшие приближения убывают быстрее любой прогрессии). Следовательно, $f(\xi) = 0$, где ξ — предельная точка последовательности $\{\xi_n\}$. Так как отрезок δ произвольный, то множество нулей $f(x)$ на $[0,1]$ всюду плотно и, ввиду непрерывности $f(x)$, имеем $f(x) \equiv 0$ на $[0,1]$. Теорема доказана.

Замечание 1. Для справедливости теоремы 4 достаточно выполнения неравенства $|f(x) - R_n(x)| \leq C \alpha_n^n$, $\alpha_n \rightarrow 0$, при $n \rightarrow \infty$ для произвольной подпоследовательности $n_1, n_2, \dots$; при этом выделяются квазианалитические классы функций.

Замечание 2. Борелем ⁽⁵⁾ была доказана теорема, показывающая возможность квазианалитического продолжения функций вида

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A_k}{z - a_k}, \quad (*)$$

где $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{A_n} = 0$, $\{a_n\}$ нигде не плотно на плоскости комплексного переменного, из области за купюру в другую область. Совершенно аналогично доказательству теоремы 4 можно доказать возможность квазианалитического продолжения функции вида (*) с любого континуума, на котором ряд (*) сходится быстрее любой прогрессии, на любой другой континуум, на котором ряд (*) равномерно сходится; например, с купюры в область или на другую купюру. Кроме того, мы можем рассматривать ряд не простых дробей, а любых рациональных функций.

Замечание 3. Несколько изменяя ход доказательства теоремы 4 и пользуясь одним результатом Е. Я. Ремеза ⁽⁶⁾, можно доказать более сильную теорему единственности.

Теорема 5. Пусть $f(x)$ — непрерывная на $[0,1]$ функция, для которой

$$R_n(f) \leq C q^n, \quad q < q_0 \left(= \frac{1}{36} \right).$$

Тогда из того, что $f(x) = 0$ на произвольном множестве Δ положительной меры, следует $f(x) \equiv 0$ на отрезке $[0,1]$.

Повидимому, свойством единственности обладает класс функций, для которых $R_n(f) \leq C q^n$, $0 < q < 1$. Доказать это пока не удастся.

В заключение искренне благодарю С. Н. Мергеляна, под руководством которого выполнена настоящая работа.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
13 XI 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ Н. И. Ахиезер, Лекции по теории аппроксимации. ² Н. Н. Лузин, Интеграл и тригонометрический ряд, 1951. ³ С. Н. Мергелян, Тр. Инст. им. В. А. Стеклова АН СССР, 37 (1951). ⁴ С. Н. Бернштейн, Собр. соч., 1. 1952. ⁵ E. Borel, Leçons sur la théorie des fonctions, 1914. ⁶ Е. Я. Ремез, Сообщ. Харьковск. матем. общ., 13, 93 (1936).