

МАТЕМАТИКА

М. А. ГОЛЬДМАН

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ СВОЙСТВА НОРМАЛЬНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ
ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

(Представлено академиком В. И. Смирновым 12 XI 1954)

Пусть E_1 и E_2 — некоторые пространства типа (B) с одним и тем же числовым полем; $\mathcal{E}$ — пространство всевозможных линейных ограниченных операторов, отображающих E_1 в E_2 , и T — произвольный оператор из $\mathcal{E}$. Обозначим через $\Delta(T)$ область значений оператора T и через $L(T)$ — множество всех его нулей. Аналогичный смысл имеют обозначения $\Delta(T^*)$ и $L(T^*)$, где T^* — оператор, сопряженный с T .

Выделим в $\mathcal{E}$ множество Γ всех операторов с замкнутыми в E_2 областями значений. Как известно, для принадлежности оператора T множеству Γ необходимо и достаточно, чтобы отвечающее этому оператору уравнение $Tx = y$ было нормально разрешимо (т. е. чтобы оно было разрешимо относительно $x \in E_1$ при заданном $y \in E_2$ в том и только в том случае, когда для любого функционала $\varphi \in L(T^*)$ выполняется равенство $\varphi(y) = 0$).

Будем говорить, что уравнение $Tx = y$, где $T \in \Gamma$, обладает устойчивостью свойства нормальной разрешимости, если это свойство сохраняется при добавлении к оператору T любого достаточно малого по норме оператора из $\mathcal{E}$, или, иными словами, если T содержится в открытом ядре Γ_0 множества Γ .

В настоящей заметке устанавливаются два критерия принадлежности оператора T из $\mathcal{E}$ множеству Γ_0 .

Разобьем множество Γ на три непересекающихся подмножества Γ_1 , Γ_2 и Γ_3 , элементы которых T удовлетворяют, соответственно, первому, второму или третьему из следующих условий: 1) числа $\dim L(T)$ и $\dim L(T^*)$ конечны; 2) только одно из них конечно; 3) оба эти числа бесконечны*.

Операторы множества Γ_1 , удовлетворяющие условию $\dim L(T) = \dim L(T^*)$, известны под названием фредгольмовых операторов. Теория таких операторов (и соответствующих им уравнений), возникшая в связи с интегральными уравнениями Фредгольма, была впервые развита Ф. Риссом (¹) и, в известном смысле, завершена С. М. Никольским (², ³). Дальнейшее изучение операторов множества Γ_1 в общем случае, когда они не стеснены дополнительным условием $\dim L(T) = \dim L(T^*)$, было осуществлено Ф. В. Аткинсоном (⁴) и И. Ц. Гохбергом (⁵, ⁶), работы которых представляют собой исследования с абстрактной точки зрения свойств сингулярных интегральных уравнений.

В статье Ф. В. Аткинсона содержится утверждение, что множество Γ_1 открыто в $\mathcal{E}$. Следовательно, $\Gamma_1 \subset \Gamma_0$. Ниже будет выяснено, что Γ_0 не исчерпывается множеством Γ_1 , а представляет собой соединение множеств Γ_1 и Γ_2 .

* Если L — некоторое линейное множество банахова пространства, то $\dim L$ означает размерность этого множества, т. е. наименьшую из мощностей множеств $M \subset L$, линейная оболочка которых плотна в L .

Теорема 1. Для принадлежности оператора T из Γ открытому ядру Γ_0 необходимо, чтобы по крайней мере одно из чисел $\dim L(T)$, $\dim L(T^*)$ было конечно. Иначе говоря, $\Gamma_0 \subseteq \Gamma_1 \cup \Gamma_2$.

Доказательству этой теоремы предпослшем лемму.

Лемма. Пусть L — подпространство некоторого пространства E типа (B). Если размерность фактор-пространства E/L бесконечна, то в E существует бесконечномерное подпространство L_1 , удовлетворяющее условию $L \cap L_1 = \theta$, где θ — нулевой элемент E .

В основе доказательства леммы лежит предложение Маккея (?): Всякое подпространство $\mathcal{L}_1$ сепарабельного пространства $\mathcal{L}$ типа (B) имеет квазидополнение*.

Доказательство леммы. Выберем в пространстве E/L линейно независимую систему $\{\tilde{x}_i\}_1^\infty$ и в каждом классе смежности $\tilde{x}_i$ — по элементу x_i . Пусть $\mathcal{L}$ — замкнутая линейная оболочка множества $\{x_i\}_1^\infty$, а $\mathcal{L}_1$ — подпространство $\mathcal{L} \cap L$. Покажем, что любое квазидополнение L_1 к $\mathcal{L}_1$ в $\mathcal{L}$ удовлетворяет требованиям нашей леммы. То, что $L \cap L_1 = \theta$, очевидно. Остается лишь показать, что $\dim L_1$ бесконечна. Предположим противное, т. е. что $\dim L_1$ конечна. Тогда, имея в виду условие $\mathcal{L}_1 \cap L_1 = \theta$, можно будет применить лемму Ф. Рисса (1), согласно которой существует такая постоянная C , что для каждого элемента x' из $\mathcal{L}_1$ и каждого элемента x'' из L_1 выполняется неравенство $\|x'\| + \|x''\| \leq C \|x' + x''\|$. При помощи этого неравенства легко показать, что $\mathcal{L}_1 \oplus L_1 = \overline{\mathcal{L}_1 \oplus L_1} (= \mathcal{L})$. Следовательно, каждый элемент x_i , как элемент из $\mathcal{L}$, может быть представлен в виде $x_i = x_i^0 + \sum_{k=1}^n \alpha_{ik} x^k$, где $x_i^0 \in \mathcal{L}_1 \subset L$, а $x^1, x^2, \dots, x^n$ —

базис в L_1 . Отсюда вытекают равенства $\tilde{x}_i = \sum_{k=1}^n \alpha_{ik} \tilde{x}^k$, $i = 1, 2, \dots$, в которых $\tilde{x}^k$ обозначает класс смежности, содержащий элемент x^k . Так как полученные равенства противоречат линейной независимости системы $\{\tilde{x}_i\}_1^\infty$, то лемма доказана.

Доказательство теоремы 1. Пусть $T \in \Gamma_3$. Покажем, что по любому положительному числу ε можно найти в $\mathcal{G}$ оператор A , который удовлетворяет следующим двум условиям: 1) $\|A\| < \varepsilon$, 2) $T + A \in \Gamma$. Это будет означать, что $T \in \Gamma_0$.

Рассмотрим фактор-пространство $E_2/\Delta(T)$. Оно бесконечномерно, ибо пространство, сопряженное с $E_2/\Delta(T)$, эквивалентно бесконечномерному пространству $L(T^*)$. Следовательно, согласно лемме, в E_2 существует такое бесконечномерное подпространство L_1 , что $\Delta(T) \cap L_1 = \theta_2$, где θ_2 — нулевой элемент пространства E_2 . Возьмем в $L(T)$ некоторую минимальную систему элементов $\{x_i\}_1^\infty$, в L_1 — линейно независимую систему $\{y_i\}_1^\infty$ и положим $Ax = \sum_{i=1}^\infty f_i(x) y_i$, где f_i — функционалы, принадлежащие пространству E_1^* , сопряженному с E_1 , причем они выбраны так, чтобы выполнялись условия: а) $f_i(x_k) = 0$, если $i \neq k$; $f_i(x_i) \neq 0$ и б) $\sum_{i=1}^\infty \|f_i\| \|y_i\| < \varepsilon$. Условие б) обеспечивает сходимость ряда $\sum_{i=1}^\infty f_i(x) y_i$ при каждом $x \in E_1$; из него же вытека-

* Подпространство $L_1 \subset \mathcal{L}$ называется квазидополнением к $\mathcal{L}_1$ в $\mathcal{L}$, если $\mathcal{L}_1 \cap L_1 = \theta$ и $\mathcal{L}_1 \oplus L_1 = \mathcal{L}$.

ет, что $\|A\| < \varepsilon$ и что последовательность операторов A_n , определяемых равенствами $A_n x = \sum_{i=1}^n f_i(x) y_i$, $n = 1, 2, \dots$, сходится к A

равномерно (т. е. в смысле метрики пространства $\mathcal{G}$). Так как A_n — конечномерные операторы, то A вполне непрерывен. Он не является конечномерным, ибо, на основании условия а), $y_i = [f_i(x_i)]^{-1} A x_i \in \Delta(A)$, $i = 1, 2, \dots$. Отсюда следует, что $\Delta(A) \neq \overline{\Delta(A)}$ (так как область значений вполне непрерывного оператора, не являющегося конечномерным, есть множество первой категории в себе). Покажем теперь, что $\Delta(T+A) \neq \overline{\Delta(T+A)}$. Пусть y_0 — некоторый элемент из $\overline{\Delta(A)}$, не принадлежащий $\Delta(A)$. Имея в виду, что $x_i \in L(T)$, $y_i \in A(L(T))$ и, следовательно, $A(L(T)) = \overline{\Delta(A)}$, можем записать элемент y_0 в виде $y_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} A x_n$, где $x_n \in L(T)$. Так как $T x_n = \theta_2$, то $y_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} (T x_n + A x_n)$,

т. е. $y_0 \in \overline{\Delta(T+A)}$. Но $y_0 \notin \Delta(T+A)$, ибо, предполагая противное, будем иметь $y_0 = T x_0 + A x_0$, $T x_0 = y_0 - A x_0 \in \overline{\Delta(A)} \subset L_1$, откуда, пользуясь равенством $\Delta(T) \cap L_1 = \theta_2$, получим $T x_0 = \theta_2$ и $y_0 = A x_0 \in \Delta(A)$, что противоречит условию выбора элемента y_0 .

Этим доказательство теоремы 1 заканчивается.

Дальнейшей нашей целью является доказательство соотношения $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \subseteq \Gamma_0$. Оно непосредственно вытекает из двух теорем, приводимых ниже. Назовем оператор U из $\mathcal{G}$ обобщенно обратимым, если хотя бы один из операторов U или U^* обратим.

Теорема 2. *Всякий оператор T из $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ может быть представлен в виде $U + K$, где U — обобщенно обратимый оператор из Γ , а K — конечномерный оператор.*

Доказательство. Предположим, что $\dim L(T) \geq \dim L(T^*)$. В этом случае $\dim L(T^*)$ конечна. Пусть $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ — базис в $L(T^*)$; $x_1, x_2, \dots, x_n$ — линейно независимые элементы из $L(T)$, а $y_1, y_2, \dots, y_n$ и $f_1, f_2, \dots, f_n$ — соответственно, элементы из E_2 и функционалы из E_1^* , удовлетворяющие условиям $f_i(x_k) = \varphi_i(y_k) =$

$= \delta_{ik}$. Положим $Kx = \sum_{i=1}^n f_i(x) y_i$, $U = T - K$, и покажем, что уравне-

ние $Ux = y$ разрешимо при всяком $y \in E_2$. Это будет означать, что U — обобщенно обратимый оператор из Γ , так как условие $\Delta(U) = E_2$ влечет за собой обратимость оператора U^* . Рассмотрим оператор

$P = I_2 - Q$, где I_2 — единичный оператор на E_2 , а $Qy = \sum_{i=1}^n \varphi_i(y) y_i$. Лег-

ко проверить, что $\Delta(P) = \Delta(T)$. Следовательно, уравнение $Tx = Py$ всегда разрешимо. Запишем общее его решение в виде $x = \bar{x} + x_0$, где $\bar{x}$ — некоторое частное решение этого уравнения (зависящее от y), а x_0 — любой элемент из $L(T)$. Оказывается, что возможен такой выбор x_0 , чтобы элемент $\bar{x} + x_0$ был решением уравнения $Ux = y$. Действительно, преобразуя $\bar{x} + x_0$ при помощи оператора U , получим: $U(\bar{x} + x_0) = T(\bar{x} + x_0) - K\bar{x} - Kx_0 = Py - K\bar{x} - Kx_0 = y - (Qy + K\bar{x} + Kx_0) =$

$= y - \sum_{i=1}^n [\varphi_i(y) + f_i(\bar{x}) + f_i(x_0)] y_i$. Отсюда видно, что элемент x_0 , для которого $U(\bar{x} + x_0) = y$, должен удовлетворять условиям $f_i(x_0) = -\bar{f}_i(\bar{x}) - \varphi_i(y)$, $i = 1, 2, \dots, n$. Они, очевидно, будут соблюдены,

если положить $x_0 = \sum_{k=1}^n \alpha_k x_k$, где $\alpha_k = -\bar{f}_k(\bar{x}) - \varphi_k(y)$, $k = 1, 2, \dots, n$.

Таким образом, теорема доказана в предположении, что $\dim L(T) \geq \dim L(T^*)$. Аналогично проводится доказательство при условии $\dim L(T) \leq \dim L(T^*)$. В этом случае устанавливается равенство $\Delta(U^*) = E_1^*$, из которого следует, что оператор $U \in \Gamma$ и обратим.

Теорема 3. *Всякий оператор T вида $U + V$, где U — обобщенно обратимый оператор из Γ , а V — вполне непрерывный оператор, принадлежит Γ_0 .*

Доказательство. Достаточно показать, что $T \in \Gamma$, так как множество обобщенно обратимых операторов U из Γ открыто в $\mathcal{G}$.

Рассмотрим оператор $\tilde{T}$, определенный на фактор-пространстве $E_1/L(T)$ при помощи равенства $\tilde{T}\tilde{x} = Tx (=y)$, где x — любой элемент из класса смежности $\tilde{x}$. Оператор $\tilde{T}$ отображает взаимно-однозначно $E_1/L(T)$ на $\Delta(T)$. В силу того, что множество $\Delta(T)$ замкнуто в E_2 в том и только в том случае, когда оператор $\tilde{T}^{-1}$, обратный к $\tilde{T}$, ограничен, наша теорема сводится к доказательству существования числа N , для которого $\|\tilde{x}\| \leq N \|y\|$ при всех $y \in \Delta(T)$. Предположим, что такого числа нет. Тогда существует последовательность $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$, для которой $\|\tilde{x}_n\| > n \|y_n\|$, где $y_n = \tilde{T}x_n$. Можно считать, что $\|\tilde{x}_n\| = 1$ при всех n ; тогда $y_n \rightarrow \theta_2$. Выберем

в каждом классе смежности $\tilde{x}_n$ по элементу x_n так, чтобы множество $\{\|x_n\|\}_1^\infty$ было ограничено, и образуем последовательность $Vx_1, Vx_2, \dots, Vx_n, \dots$. Эта последовательность компактна. Выделим из нее сходящуюся последовательность $Vx_{n_1}, Vx_{n_2}, \dots, Vx_{n_k}, \dots$. Так как $U = T - V$, $Tx_{n_k} = y_{n_k}$ и $y_{n_k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$, то последовательность

$Ux_{n_1}, Ux_{n_2}, \dots, Ux_{n_k}, \dots$ тоже сходится. Предположим, что оператор U обратим. Тогда, в силу условия $U \in \Gamma$, будет сходящейся и последовательность $x_{n_1}, x_{n_2}, \dots, x_{n_k}, \dots$. Если $x_0 = \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k}$, то $Tx_0 = \lim_{k \rightarrow \infty} Tx_{n_k} = \theta_2$, т. е. $x_0 \in L(T)$. Поэтому $\|x_{n_k} - x_0\| \geq \inf_{x \in L(T)} \|x_{n_k} - x\| =$

$= \|\tilde{x}_{n_k}\| = 1$. Получилось противоречие со сходимостью x_{n_k} к x_0 . Это доказывает теорему в случае обратимости оператора U . Для ее доказательства при условии, что обратим оператор U^* , нужно рассмотреть оператор $T^* = U^* + V^*$ и принять во внимание, что из равенства $\Delta(T^*) = \overline{\Delta(T^*)}$ следует равенство $\Delta(T) = \overline{\Delta(T)}$.

Теоремы 1—3 позволяют сформулировать следующие два критерия принадлежности оператора T множеству Γ_0 .

1. *Для принадлежности оператора T из Γ множеству Γ_0 необходимо и достаточно, чтобы по крайней мере одно из чисел $\dim L(T)$, $\dim L(T^*)$ было конечно.*

2. *Для принадлежности оператора T из $\mathcal{G}$ множеству Γ_0 необходимо и достаточно возможность представления T в виде $U + V$, равно как и в виде $U + K$, где U — обобщенно обратимый оператор из Γ , а V и K — соответственно, вполне непрерывный и конечномерный операторы.*

Латвийская
сельскохозяйственная академия

Поступило
9 XI 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Ф. Рисс, Усп. матем. наук, в. 1 (1936). ² С. М. Никольский, ДАН, 2, № 8 (1936). ³ С. М. Никольский, Изв. АН СССР, сер. матем., 7, № 3 (1943). ⁴ Ф. В. Аткинсон, Матем. сборн., 28, (70), № 1, 147 (1951). ⁵ И. Ц. Гохберг, ДАН, 76, № 4 (1951). ⁶ И. Ц. Гохберг, ДАН, 78, № 4 (1951). ⁷ G. W. Maskey, Math. Rev., 7, No. 9 (1946).