

МАТЕМАТИКА

Член-корреспондент АН СССР И. Н. ВЕКУА

**ЗАДАЧА ПРИВЕДЕНИЯ К КАНОНИЧЕСКОМУ ВИДУ
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ФОРМ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА
И ОБОБЩЕННАЯ СИСТЕМА КОШИ — РИМАНА**

К задаче приведения квадратичной формы $K \equiv a(x, y) dx^2 + 2b(x, y) dx dy + c(x, y) dy^2$, $g^2 \equiv ac - b^2 > 0$, к виду $\Lambda (d\xi^2 + d\eta^2)$, $\Lambda > 0$, как известно, редуцируется проблема приведения к канонической форме следующего вида уравнений в частных производных эллиптического типа:

$$au_{yy} - 2bu_{xy} + cu_{xx} + F(x, y, u, u_x, u_y) = 0, \quad (1)$$

а также систем уравнений

$$\begin{aligned} -u_x &= av_y - 2b'v_x + F_1(x, y, u, v) \quad (b' + b'' = b), \\ u_y &= cv_x - 2b''v_y + F_2(x, y, u, v). \end{aligned} \quad (2)$$

В свою очередь, указанная задача приводит к доказательству существования однолистных решений системы уравнений эллиптического типа вида

$$gu_x = av_y - bv_x, \quad -gu_y = cv_x - bv_y, \quad (3)$$

которая является обобщением системы Коши — Римана. В настоящее время эти задачи принципиально можно считать изученными ^(1, 2, 4) на основе общей теории униформизации ⁽³⁾. Полное исследование этих задач, в частности доказательство существования однолистных решений эллиптической системы (3), можно получить на основе геометрической теории квазиконформных отображений, развитой М. А. Лаврентьевым ^(5, 6) (см. еще ^(13, 14)). Ниже указывается непосредственный прием глобального изучения этих задач, который основан на принципе сжатых отображений.

Систему (3) мы можем записать в виде

$$w_{\bar{z}} + q(z)w_z = 0 \quad (4)$$

$$\left(q = \frac{b + i(g - a)}{b + i(g + a)}, \quad w_{\bar{z}} = \frac{1}{2}(w_x + iw_y), \quad w_z = \frac{1}{2}(w_x - iw_y) \right).$$

Обозначая через E плоскость $z = x + iy$, будем считать, что:
1) $q(z) \in L_\infty(E)$ и 2) существенная верхняя грань $|q(z)| = q_0 < 1$.

Понимая w_z и $w_{\bar{z}}$ в смысле С. Л. Соболева ⁽⁷⁾, пару вещественных суммируемых функций $u(x, y)$ и $v(x, y)$ будем называть обобщенным решением системы (3), если комплексная функция $w = u + iv$ удовлетворяет уравнению (4) почти везде. Непрерывно дифференцируемые решения системы (3) будем называть регулярными решениями.

Будем искать решения уравнения (4) в виде

$$w(z) = -\frac{1}{\pi} \iint_E \frac{\omega(\zeta) d\zeta d\eta}{\zeta - z} + \Phi(z) \equiv T\omega + \Phi(z), \quad (5)$$

где Φ — произвольная целая функция от z , а ω — искомая функция.
Если $\omega \in L_p(E)$, $p > 1$, то

$$w_z = \omega, \quad w_z = -\frac{1}{\pi} \iint_E \frac{\omega(\zeta) d\zeta d\eta}{(\zeta - z)^2} + \Phi'(z) \equiv -S\omega + \Phi'(z), \quad (6)$$

причем интеграл здесь надо понимать в смысле главного значения по Коши. Подставляя это в (4), получим для ω сингулярное интегральное уравнение типа Трикоми ⁽⁸⁾:

$$\omega(z) - A\omega = -q(z)\Phi'(z), \quad A\omega \equiv q(z)S\omega. \quad (7)$$

Оператор S линеен и ограничен в $L_p(E)$, $p > 1$, причем $\|Sf\| \leq A_p \|f\|_{L_p}$ ⁽⁹⁾. Нетрудно доказать, что $A_2 = 1$ (см., например ⁽¹⁰⁾). Учитывая, что $|q(z)| \leq q_0 < 1$ почти везде в E , можем указать такое $\varepsilon > 0$, чтобы $\|A\|_{L_p} \leq q_0 A_p < 1$ при $|2 - p| \leq \varepsilon$. Тогда на основании принципа сжатых отображений уравнение (7) имеет единственное решение, принадлежащее L_p , если правая часть принадлежит $L_p(E)$, $|p - 2| \leq \varepsilon$. В частности, решение Ω уравнения $\Omega - A\Omega = -q$, очевидно, принадлежит L_p , $p > 2$. Поэтому $W(z) = z + T\Omega$ будет непрерывным в смысле Гельдера обобщенным решением уравнения (4). Все остальные обобщенные решения этого уравнения получаются при помощи равенства $w(z) = F(W(z))$, где F — произвольная аналитическая функция.

Обозначим через H множество функций $L_p(E)$, непрерывных в смысле Гельдера. Можно доказать, что $\Omega \in H$, если $q \in H$ ⁽¹¹⁾.

Докажем теперь, что частное решение $W(z) = T\Omega + z$ ($\Omega - qS\Omega = -q$, $q \in H$) уравнения (4) осуществляет гомеоморфное отображение плоскости z на плоскость W .

Пусть ω_0 — решение уравнения $\omega_0 - q(z)S\omega_0 = [q(z_0) - q(z)][Z(z, z_0)]^{-1}$, где $Z(z, z_0) = z - z_0 - q(z_0)(\bar{z} - \bar{z}_0)$, z_0 — фиксированная точка. Нетрудно показать, что $\omega_0 \in L_p$, $p > 2$, и $w(z, z_0) = Z(z, z_0) \exp(T\omega_0)$ — регулярное на всей плоскости решение уравнения (4), осуществляющее гомеоморфное отображение некоторой окрестности точки z_0 на окрестность точки $w = 0$. Следовательно, любое регулярное в окрестности точки z_0 решение уравнения (4) имеет вид: $w(z) = \Phi_0[w(z, z_0)]$, где Φ_0 — голоморфная функция в окрестности точки $w = 0$, т. е. $w(z) = [w(z, z_0)]^n \Phi_1[w(z, z_0)]$, где n — целое число, $n \geq 0$, а $w_1(z) = \Phi_1[w(z, z_0)]$ — регулярное в окрестности z_0 решение, причем $w_1(z_0) \neq 0$. Если $n > 0$, то z_0 есть нуль $w(z)$ кратности n . Следовательно, регулярное решение $w(z)$ уравнения (4) может иметь лишь изолированные нули внутри области.

Для большей ясности мы ограничимся рассмотрением случая, когда $q = 0$ вне некоторой ограниченной области G_q . (Приводимое ниже рассуждение с небольшим изменением применяется и к общему случаю.) Тогда вне G_q : 1) $\omega = 0$; 2) $W(z)$ голоморфна и 3) $T\Omega = O(|z|^{-1})$. Легко видеть, что $W(z)$ осуществляет конформное отображение внешности некоторой окружности $|z| = R$ на внешность простой замкнутой аналитической кривой L_R , причем имеется гомеоморфизм между окружностью $|z| = R$ и кривой L_R . Остается доказать, что $W(z)$ осуществ-

влетает гомеоморфное отображение круга $|z| < R$ на внутренность кривой L_R . Пусть w_0 — некоторая фиксированная точка внутри L_R . Имеем

$$1 = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_R} \frac{dw}{w - w_0} = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=R} \frac{dW(z)}{W(z) - w_0} = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=R} \operatorname{dlog} [W(z) - w_0]. \quad (8)$$

Так как $W(z) \neq w_0$ при $|z| = R$, то внутри круга $|z| < R$ может лежать лишь конечное число нулей $z_1, \dots, z_m$ регулярного решения $W(z) - w_0$ уравнения (4), причем каждый нуль мы считаем столько раз, какова

его кратность. Тогда мы можем написать: $W(z) - w_0 = w_1(z) \prod_{k=1}^m w(z, z_k)$,

где $w_1(z)$ — регулярное решение, которое нигде не обращается в нуль внутри L_R . Но, в силу равенства (8), $m = 1$, т. е. имеется одна и только одна точка z_1 такая, что $W(z_1) = w_0$. Таким образом наше утверждение доказано.

Так как формула $w(z) = F(W(z))$, где F — произвольная аналитическая функция, даёт все решения системы (3), то легко доказать теорему:

Всегда существует решение системы (3), реализующее гомеоморфное (квазиконформное) отображение на единичный круг любой односвязной области, граница которой содержит по крайней мере две различные точки.

Заметим, что если $\zeta = w(z)$ — однолиственное в некоторой области G решение системы (3), то обратная функция $z = w^{-1}(\zeta)$ будет однолиственным решением квазилинейного уравнения: $\frac{\partial \bar{z}}{\partial \zeta} - \bar{q}(\zeta) \frac{\partial z}{\partial \zeta} = 0$.

Вернемся теперь к квадратичной форме K . Будем считать, что $a, b, c \in H$, $ac - b^2 \geq k > 0$. Если обозначить: $Z = X + iY = W(z) = z + T\Omega$, то форма K приведется к виду $\Lambda(dX^2 + dY^2)$, $\Lambda > 0$. Назовем новые переменные X и Y изометрическими координатами формы K . Очевидно, в результате аналитического преобразования вида $Z' = f(Z)$ или $Z^* = f(\bar{Z})$ изометрические координаты переходят в изометрические же координаты.

Если $a, b, c \in H$, $ac - b^2 \geq k > 0$, то, беря в качестве новых переменных изометрические координаты формы $a dx^2 + 2b dx dy + c dy^2$, уравнение (1) приведем к каноническому виду $\Delta u + F(x, y, u, u_x, u_y) = 0$, а систему (2) — к виду

$$\begin{aligned} u_x + A(x, y) v_y + B(x, y) v_x + F_1 &= 0, \\ u_y + A(x, y) v_x + B(x, y) v_y + F_2 &= 0, \end{aligned} \quad (9)$$

причем $B = b'' - b'$, $A = g > 0$. Если A и B дифференцируемы, то система (9) легко приводится к каноническому виду $U_x - V_y = A_0 V + F_1$, $U_y + V_x = B_0 V + F_2$ подстановкой $U = u + Bv$, $V = Av$. Пользуясь этим, Л. Берс ⁽¹²⁾ недавно доказал существование решения системы (2) (при $F_1 = F_2 = 0$), однолистного на всей плоскости. При помощи указанного выше метода это предложение доказывается при более слабых ограничениях.

Очевидно, это предложение достаточно доказать для системы $u_z + (B_1 + iA) v_z = 0$. Если решение будем искать в виде $W_*(z) = \bar{z} + \bar{T}\Omega$, то для Ω получим уравнение: $\Omega(z) - Q(z) S\bar{\Omega} = -Q(z)$ ($Q = (1 - A + iB)/(1 + A - iB)$, $A > 0$), которое имеет единственное решение, так как $\sup |Q(z)| = Q_0 < 1$. Можно доказать, что $W_*(z)$ гомеоморфно отображает плоскость z на плоскость W_* , если $Q_z \in L_p$, $p > 2$.

Это вытекает из следующей теоремы: если $Q_z, A_0, B_0 \in L_p, p > 2$, в некоторой области G , то нули нетривиального регулярного в G решения $w = u + iv$ уравнения $w_z - Q(z)\bar{w}_z + A_0 w + B_0 \bar{w} = 0$ изолированы внутри G .

Теперь можно построить решение системы $-u_x = av_y - 2b'v_x$, $u_y = cv_x - 2b''v_y$, $ac - (b' + b'')^2 \geq k > 0$, реализующее гомеоморфное (квазиконформное) отображение плоскости z , на плоскость решения $w = u + iv$. Таким решением является сложная функция

$$W_* \{W(z)\}.$$

Поступило
29 IX 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ L. Lichtenstein, J. f. reine u. angew. Math., 142, 1 (1913). ² L. Lichtenstein, Bull. Acad. Sci. Cracovie, ser. A, 192 (1916). ³ F. Koebe, Crelle J., 138 (1910). ⁴ P. Hartman, A. Winter, Am. J. Math., 75, No. 2, 260 (1953). ⁵ М. А. Лаврентьев, Изв. АН СССР, сер. матем., 12, № 6, 513 (1948). ⁶ М. А. Лаврентьев, Матем. сборн., 42, № 4, 407 (1935); 21 (63), 285 (1947). ⁷ И. Н. Векуа, ДАН, 89, № 5, 773 (1953). ⁸ F. Tricomì, Math. Zs., 27, 87 (1928). ⁹ A. Calderon, A. Zygmund, Acta Math., 88, 85 (1952). ¹⁰ С. Г. Михлин, Усп. матем. наук, 3, 3 (25), 27 (1948). ¹¹ G. Giraud, Ann. de l'Ecole Norm., III S., 51, 251 (1934). ¹² L. Bers, Comm. on Pure and Appl. Mathem., 6, No. 4, 513 (1953). ¹³ Г. Н. Положий, ДАН, 95, № 5, 927 (1955). ¹⁴ F. Dressel, J. Gergen, Trans. Am. Mathem. Soc., 77, № 1, 75 (1954).