Доклады Академии Наук СССР
1954. Том XCIX, № 5

МАТЕМАТИКА

В. БОЛТЯНСКИЙ

ЗАДАЧА О СНЯТИИ СЕКУЩЕЙ ПОВЕРХНОСТИ С ПОДПРОИЗВЕДЕНИЯ

(Представлено академиком П. С. Александровым 28 IX 1954)

1. Постановка задачи. Пусть B — симплициальный комплекс. Рассмотрим косое произведение $\mathfrak{P} = \{P, p, B, F, G\}$ с базой B и пусть $\mathfrak{Q} = \{Q, p, B, E, G'\}$ — его произведение. Это означает, что $Q \subset P$; E есть подпространство слоя F, остающееся инвариантным при всех преобразованиях $g \in G$, а $G' = G/N$, где N есть ядро неэффективности группы G, рассматриваемой как группа преобразований пространства E. Кроме того, для каждого симплекса $T \in B$ координатная функция $\xi_T: F \times T \to p^{-1}(T)$ произведения $\mathfrak{P}$ совпадает на $E \times T$ с соответствующей координатной функцией произведения $\mathfrak{Q}$. Как обычно, будем писать $\xi_T(x, z) = \xi_{T,x}(z)$; $x \in T$, $z \in F$. Структурную группу G будем предполагать линейно связной.

Предположим, что в косом произведении $\mathfrak{P}$ существует секущая поверхность $\mathfrak{S}_0: B \to P$, и поставим вопрос: при каких условиях секущая поверхность $\mathfrak{S}_0$ может быть при помощи деформации «снята» с подпроизведения $\mathfrak{Q}$ (т. е. превращена в такую секущую поверхность $\mathfrak{S}_1$ произведения $\mathfrak{P}$, что $\mathfrak{S}_1(B) \subset P \setminus Q$).

2. Определение препятствия. Фиксируем число r и будем предполагать, что пара $(F, F \setminus E)$ гомотопически проста в размерности r. Выберем подкомплекс B' комплекса B, содержащий остов B^r, и будем обозначать через $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{S}_0$, $\mathfrak{S}_1$ секущие поверхности, заданные в произведении $\mathfrak{P}$ на подкомплексе B' и отображающие остов B^{r-1} в $P \setminus Q$. Пусть $\mathfrak{S}_t$ — деформация, соединяющая секущие поверхности $\mathfrak{S}_0$ и $\mathfrak{S}_1$. Мы будем называть ее k-деформацией, если при любом t, $0 \leqslant t \leqslant 1$, секущая поверхность $\mathfrak{S}_t$ отображает остов B^{r-k-1} в $P \setminus Q$.

Пусть T — ориентированный r-мерный симплекс комплекса B, а $\dot{T}$ — его граница. Отображение φ пары $(T, \dot{T})$ в $(F, F \setminus E)$, определенное формулой

$$\varphi(x) = \xi_{T,x}^{-1}(\mathfrak{S}(x)), \quad x \in T,$$

задает некоторый элемент группы $\pi^r(F, F \setminus E)$. Этот элемент мы поставим в соответствие ориентированному симплексу T. Полученную r-мерную цепь обозначим через $s^r(\mathfrak{S})$ и назовем r-мерным препятствием для снятия секущей поверхности $\mathfrak{S}$.

3. Свойства препятствия. Пусть A_1 и A_2 — абелевы группы и g — гомоморфизм группы A_1 в A_2. Пусть, далее, x^s — цепь комплекса B по области коэффициентов A_1. Через $\hat{g}x^s$ обозначим цепь по области коэффициентов A_2, принимающую на s-мерных симплексах T значения $\hat{g}x^s(T) = g(x^s(T))$.

Множество $P \setminus Q$ есть пространство косого произведения со слоем $F \setminus E$ (при тех же p и B). Это косое произведение мы обозначим через $\mathcal{F} \setminus \mathcal{Q}$. Секущая поверхность $\mathfrak{S}$, рассматриваемая на остове B^{r-1}, является также секущей поверхностью произведения $\mathcal{F} \setminus \mathcal{Q}$. Препятствие $\mathfrak{z}^r(\mathfrak{S})$ к продолжению этой секущей поверхности на остов B^r есть ∇-цикл по области коэффициентов $\pi^{r-1}(F \setminus E)$.

Через $j_*\colon \pi^s(F) \to \pi^s(F, F \setminus E)$ обозначается гомоморфизм вложения, через $\partial\colon \pi^s(F, F \setminus E) \to \pi^{s-1}(F \setminus E)$ — граничный гомоморфизм.

а) При 0-деформации секущей поверхности $\mathfrak{S}$ цепь $s^r(\mathfrak{S})$ не меняется.

б) Для возможности снятия секущей поверхности $\mathfrak{S}$ с подпроизведения $\mathcal{Q}$ на остове B^r при помощи 0-деформации необходимо и достаточно, чтобы было $s^r(\mathfrak{S}) = 0$.

в) Если секущие поверхности $\mathfrak{S}_0$ и $\mathfrak{S}_1$ совпадают друг с другом на остове B^{r-1} и $d^r(\mathfrak{S}_0, \mathfrak{S}_1)$ — их различающая, то имеет место формула

$$s^r(\mathfrak{S}_0) = s^r(\mathfrak{S}_1) + \hat{j}_* d^r(\mathfrak{S}_0, \mathfrak{S}_1).$$

г) Пусть $z^{r+1}(\mathfrak{S})$ — препятствие к распространению секущей поверхности $\mathfrak{S}$ на остов B^{r+1}. Тогда имеет место формула

$$\nabla s^r(\mathfrak{S}) = \hat{j}_* z^{r+1}(\mathfrak{S}).$$

д) Если секущие поверхности $\mathfrak{S}_0$ и $\mathfrak{S}_1$ могут быть соединены 1-деформацией, то разность $s^r(\mathfrak{S}_0) - s^r(\mathfrak{S}_1)$ является ∇-границей некоторой цепи. Обратно, при помощи 1-деформации всегда можно перевести заданную секущую поверхность $\mathfrak{S}_0$ в такую секущую поверхность $\mathfrak{S}_1$, что разность $s^r(\mathfrak{S}_0) - s^r(\mathfrak{S}_1)$ равна заданной ∇-границе.

е) $\hat{\partial} s^r(\mathfrak{S}) = \mathfrak{z}^r(\mathfrak{S})$.

Вопрос о поведении препятствия при 2-деформациях решается в п. 5.

4. Вспомогательные гомологические операции. Во всем дальнейшем, кроме п. 6, мы будем предполагать, что группа G транзитивна на $F \setminus E$. Обозначим через H стабильную подгруппу группы G, соответствующую точке $q \in F \setminus E$. Группу H будем предполагать линейно связной, а пару $(F, F \setminus E)$ — гомотопически простой в размерности $r-1$.

Определим для каждых двух элементов $\alpha \in \pi^1(H)$, $\beta \in \pi^{r-1}(F, F \setminus E)$ произведение $\alpha\beta \in \pi^r(F, F \setminus E)$. Пусть I^2, I^{r-1}, $I^{r+1} = I^{r-1} \times I^2$ — кубы размерностей 2, $r-1$, $r+1$. Пусть J^{r-2} — грань куба I^{r-1}, определенная уравнением $x_{r-1} = 0$, а J'^{r-2} — остальная часть границы куба I^{r-1}. Пусть S^1 — граница квадрата I^2, а $\varphi\colon S^1 \to H$ — отображение, определяющее элемент $\alpha \in \pi^1(H)$; положим $\varphi_a = \varphi(a)$, $a \in S^1$. Пусть, далее, f — такое отображение куба I^{r-1} в F, переводящее J^{r-2} в $F \setminus E$, а I^{r-2} — в q, которое определяет элемент $\beta \in \pi^{r-1}(F, F \setminus E)$. Множество $E^r = I^{r-1} \times S^1 \cup J^{r-2} \times I^2 \subset I^{r+1}$ является r-мерным элементом; границу его обозначим через S^{r-1}. Определим отображение ψ пары (E^r, S^{r-1}) в $(F, F \setminus E)$, положив:

$$\psi(a, b) = \begin{cases} \varphi_b(f(a)) & \text{при } a \in I^{r-1},\ b \in S^1; \\ q & \text{при } a \in J^{r-2},\ b \in I^2. \end{cases}$$

Отображение ψ определяет некоторый элемент $\gamma \in \pi^r(F, F \setminus E)$, который однозначно определяется элементами α и β. Мы положим $\gamma = \alpha\beta$. Это дает возможность определить $\cup$-произведение $\xi \cup \eta$, где $\xi \in \nabla^2(B, \pi^1(H))$, $\eta \in \nabla^{r-2}(B, \pi^{r-1}(F, F \setminus E))$.

Разложим группу $\pi^{r-1}(F, F \setminus E)$ в прямую сумму циклических групп, и пусть $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ — образующие этих циклических слагаемых. Порядки элементов $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ обозначим через $\vartheta_1, \ldots, \vartheta_m$. Пусть $\mathfrak{E} = E_1^{r-1} \cup \ldots \cup E_m^{r-1}$ — букет шаров; здесь E_i^{r-1} есть $(r-1)$-мерный элемент, причем все элементы E_i^{r-1} имеют общую граничную точку, а других общих точек попарно не имеют. Границу элемента E_i^{r-1} обозначим через S_i^{r-2} и положим $\mathfrak{B} = S_1^{r-2} \cup \ldots \cup S_m^{r-2}$. Существует такое отображение μ пары $(\mathfrak{E}, \mathfrak{B})$ в $(F, F \setminus E)$, что отображение μ элемента E_i^{r-1} определяет элемент α_i группы $\pi^{r-1}(F, F \setminus E)$. Группа $\pi^{r-1}(\mathfrak{B})$ при $r > 4$ имеет m образующих, которые мы обозначим через $\gamma_1, \ldots, \gamma_m$; при $r = 4$ эта группа имеет $\frac{1}{2} m(m+1)$ образующих, которые мы обозначим через γ_{ij}, $i \leqslant j = 1, \ldots, m$ (см. [1]). Граничный гомоморфизм $\partial\colon \pi^r(\mathfrak{E}, \mathfrak{B}) \to \pi^{r-1}(\mathfrak{B})$ является изоморфизмом на. При $r = 4$ мы положим $\beta_{ij} = \mu_* \partial^{-1}(\gamma_{ij})$. Из [1] следует, что порядок элемента β_{ii} является делителем числа $2\vartheta_i$, если ϑ_i четно, и делителем числа ϑ_i, если оно нечетно; порядок элемента β_{ij}, $i < j$, является делителем числа $(\vartheta_i, \vartheta_j)$. При $r > 4$ положим $\beta_i = \mu_* \partial^{-1}(\gamma_i)$ и определим умножение элементов группы $\pi^{r-1}(F, F \setminus E)$ в $\pi^r(F, F \setminus E)$, считая, что $\alpha_i \cdot \alpha_i = \beta_i$, $\alpha_i \cdot \alpha_j = 0$ при $i \neq j$. Это умножение позволяет (при $r > 4$) определить стинродовский квадрат [2]

$$\mathrm{Sq}^2\colon \nabla^{r-2}(B, \pi^{r-1}(F, F \setminus E)) \to \nabla^r(B, \pi^r(F, F \setminus E)).$$

При $r = 4$ мы определим квадратичную операцию, обобщающую понтрягинский квадрат $\cup$ [1]. Именно, пусть X — свободная абелева группа с образующими $\bar{\alpha}_i$, $i = 1, \ldots, m$, а Y — свободная абелева группа с образующими $\bar{\beta}_{ij}$, $i \leqslant j = 1, \ldots, m$. Определим гомоморфизмы $e\colon X \to \pi^3(F, F \setminus E)$ и $g\colon Y \to \pi^4(F, F \setminus E)$, положив $e(\bar{\alpha}_i) = \alpha_i$, $g(\bar{\beta}_{ij}) = \beta_{ij}$. Определим, далее, билинейное умножение элементов группы X в группе Y, считая, что $\bar{\alpha}_i \cdot \bar{\alpha}_j = \bar{\alpha}_j \cdot \bar{\alpha}_i = \bar{\beta}_{ij}$, $i \leqslant j = 1, \ldots, m$. Тогда мы сможем (выбрав порядок вершин в B) определить операции $\cup_0$ и $\cup_1$ для цепей комплекса B по области коэффициентов X. Если ξ — элемент группы $\nabla^2(B, \pi^3(F, F \setminus E))$, а z — цикл класса гомологий ξ, то выберем такую цепь x по области коэффициентов X, что $\hat{e}x = z$, и положим: $z' = \hat{g}(x \cup_0 x + \nabla x \cup_1 x)$. Оказывается, что z' есть ∇-цикл, класс гомологий η которого однозначно определяется классом гомологий ξ, так что можно положить: $\eta = \mathrm{Кв}\,\xi$.

5. Поведение препятствия при 2-деформациях. Начнем строить для каждого слоя F_x произведения $\mathcal{F}$ такое допустимое отображение $\varphi_x\colon F \to F_x$, которое переводит точку q в $\mathfrak{S}_0(x)$ и непрерывно зависит от x. В силу связности группы H отображения φ_x удастся построить для всех точек $x \in B^1$. При попытке продолжения отображений φ_x на все точки остова B^2 возникает препятствие, являющееся при $r \geqslant 4$ ∇-циклом по области коэффициентов $\pi^1(H)$. Класс гомологий $Y^2(\mathfrak{S}_0)$ этого ∇-цикла однозначно определяется секущей поверхностью $\mathfrak{S}_0$.

ж) Если секущие поверхности $\mathfrak{S}_0$ и $\mathfrak{S}_1$ могут быть соединены 2-деформацией, то $s^r(\mathfrak{S}_0) - s^r(\mathfrak{S}_1)$ есть ∇-цикл, принадлежащий при $r = 4$ классу гомологий $Y^2(\mathfrak{S}_0) \cup \Lambda^2 + \mathrm{Кв}\,\Lambda^2$, а при $r > 4$ — классу гомологий $Y^2(\mathfrak{S}_0) \cup \Lambda^{r-2} + \mathrm{Sq}^2 \Lambda^{r-2}$, где Λ^{r-2} — некоторый элемент группы $\nabla^{r-2}(B, \pi^{r-1}(F, F \setminus E))$. Обратно, если z^r есть ∇-цикл, принадлежащий классу гомологий указанного вида, то существует 2-деформация, переводящая заданную секущую поверхность $\mathfrak{S}_0$ в такую секущую поверхность $\mathfrak{S}_1$, что $s^r(\mathfrak{S}_0) - s^r(\mathfrak{S}_1) = z^r$.

6. Первое препятствие. Будем теперь предполагать, что слой F является n-мерным многообразием, а E — его m-мерным подмногообразием. Тогда при $i < r$, где $r = n - m$, группа $\pi^i(F, F \setminus E)$ тривиальна. Всякая секущая поверхность $\mathfrak{S}$ произведения $\mathfrak{P}$ может быть при помощи деформации снята с $\mathfrak{a}$ на остове B^{r-1}, после чего для нее определится препятствие $s^r(\mathfrak{S})$ — первое препятствие. Класс гомологий первого препятствия не зависит от выбора деформации, при помощи которой секущая поверхность $\mathfrak{S}$ снята с $\mathfrak{a}$ на остове B^{r-1}. Мы обозначим этот класс гомологий через $Z^r(\mathfrak{S})$. Для возможности снятия секущей поверхности $\mathfrak{S}$ с $\mathfrak{a}$ на остове B^r необходимо и достаточно, чтобы было $Z^r(\mathfrak{S}) = 0$.

7. Второе препятствие. Пусть класс гомологий $Z^r(\mathfrak{S})$ равен нулю. Тогда секущая поверхность $\mathfrak{S}$ может быть снята с $\mathfrak{a}$ на остове B^r, после чего для нее определится препятствие $s^{r+1}(\mathfrak{S})$ — второе препятствие. Если секущая поверхность $\mathfrak{S}$ двумя способами снята с $\mathfrak{a}$ на остове B^r, то разность вторых препятствий для полученных секущих поверхностей является циклом класса гомологий

$$Y^2(\mathfrak{S}) \cup \Lambda^2 + \mathrm{Kв}\,\Lambda^2 \quad \text{при } r = 3,$$

$$Y^2(\mathfrak{S}) \cup \Lambda^{r-1} + \mathrm{Sq}^2\Lambda^{r-1} \quad \text{при } r > 3,$$

где Λ^{r-1} — некоторый элемент группы $\nabla^{r-1}(B, \pi^r(F, F \setminus E))$. Для возможности снятия секущей поверхности $\mathfrak{S}$ с $\mathfrak{a}$ на остове B^{r+1} необходимо и достаточно, чтобы цикл $s^{r+1}(\mathfrak{S})$ принадлежал классу гомологий указанного вида.

Математический институт
им. В. А. Стеклова
Академии наук СССР

Поступило
22 IX 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Л. С. Понтрягин, Изв. АН СССР, сер. матем., **14**, № 1, 7 (1950).
[2] N. E. Steenrod, Ann. Math., **48**, 290 (1947).