Доклады Академии наук СССР
1955. Том 100, № 1

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

Академик Н. Н. БОГОЛЮБОВ и О. С. ПАРАСЮК

К ТЕОРИИ УМНОЖЕНИЯ ПРИЧИННЫХ СИНГУЛЯРНЫХ ФУНКЦИЙ

Как хорошо известно, ковариантная теория возмущений основана на понятии хронологического умножения операторов. Раскрытие хронологического произведения операторов, согласно теореме Вика ([1]), приводит к сумме так называемых нормальных произведений с коэффициентными функциями, которые выражаются формально через произведения причинных сингулярных функций. Однако импульсные образы этих произведений, как правило, приводят к расходимостям при больших импульсах, что явилось источником серьезных трудностей в квантовой теории поля.

В последнее время выяснилось ([2]), что причинные сингулярные функции следует рассматривать как линейные функционалы на соответствующих пространствах. Отправляясь от такой точки зрения, можно построить также и последовательную теорию умножения причинных сингулярных функций.

Заметим, что теория, развиваемая ниже, обобщает известные результаты Дайсона — Салама ([3,4]).

Используя соотношение

$$\frac{1}{m^2 - k^2 - i\varepsilon} = i \int_0^\infty e^{i\alpha(k^2 - m^2 + i\varepsilon)}\, d\alpha, \tag{1}$$

будем определять причинные сингулярные функции $\Delta^c(x)$ как «несобственный предел» регуляризованных функций (т. е. слабый предел функционалов)

$$\operatorname{reg} \Delta^c(x) = \frac{i}{(2\pi)^4} \int e^{ikx} Z(k) \int_0^\infty I(\alpha)\, e^{i\alpha(k^2 - m^2 + i\varepsilon)}\, d\alpha\, dk \tag{2}$$

при $M_j \to \infty$, $\varepsilon \to 0$, где

$$I(\alpha) = 1 + \sum_{1 \leqslant j \leqslant n} c_j e^{-i\alpha(M_j^2 - m^2)}; \tag{3}$$

$Z(k)$ — полином; $kx = k^0 x^0 - \mathbf{kx}$; числа c_j ограничены при $M_j \to \infty$ и, кроме того, удовлетворяют линейным условиям типа: $\Sigma M_i^{2l} c_i = 0$; $l = 0, 1, \ldots, h$.

Произведение

$$\prod_l \operatorname{reg} \Delta_l^c (x_r - x_s)$$

мы можем, прибегая к геометрической интерпретации, рассматривать как вклад от диаграммы $G(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, линиям l которой соответствуют отдельные множители $\operatorname{reg} \Delta_l^c$.

Обозначим через

$$G = G_1 \times G_2 \times \cdots \times G_s$$

некоторое фиксированное разбиение диаграммы G на «обобщенные узлы» $G_1(x_1, x_2, \ldots, x_{\nu_1})$, $G_2(x_{\nu_1+1}, \ldots, x_{\nu_2}), \ldots, G(x_{\nu_{s-1}+1}, \ldots, x_n)$, которые назовем базисными узлами. Из базисных узлов будем образовывать всевозможными способами укрупненные узлы

$$\Gamma_\alpha = G_{\alpha_1} \times G_{\alpha_2} \times \cdots \times G_{\alpha_k}.$$

Условимся через $\Delta(G_i)$ записывать операцию, которая ставит в соответствие базисному узлу G_i вклад вида

$$\delta(\Sigma k) f_{G_i}(\ldots k \ldots),$$

где k — импульсы, соответствующие точкам x, лежащим внутри G_i, $f_{G_i}(\ldots k \ldots)$ — полином.

Будем обозначать через

$$\Delta(G_1)\Delta(G_2)\cdots\Delta(G_s)$$

импульсный образ вклада от диаграммы $G = G_1 \times G_2 \times \cdots \times G_s$, подсчитанный согласно следующим правилам:

а) базисным узлам сопоставляем вклад $\Delta(G_i)$;

б) линиям, соединяющим различные G_i между собой, сопоставляем те же причинные функции, что и в первоначальной диаграмме G;

в) линии, идущие внутри каждого G_i, не учитываются.

Допустим теперь, что каждому обобщенному узлу Γ_α диаграммы G поставлено в соответствие целое положительное число $\nu(\Gamma_\alpha)$ (способ задания таких чисел будет конкретизирован).

Тогда символом $\Delta(\Gamma_\alpha)$ условимся записывать вклад от диаграммы Γ_α, подсчитанный согласно следующим правилам:

а) если диаграмма Γ_α слабосвязная, т. е. состоит из двух связных диаграмм, соединенных только одной линией, то

$$\Delta(\Gamma_\alpha) = 0;$$

б) если диаграмма Γ_α сильносвязная (т. е. не слабосвязная), то $\Delta(\Gamma_\alpha)$ определяется индуктивно, а именно: допустим, что для всех $\Gamma_\beta \subset \Gamma_\alpha$ вклад $\Delta(\Gamma_\beta)$ уже определен; тогда

$$\Delta(\Gamma_\alpha) = -M(\Gamma_\alpha)\{\Delta(G_{\alpha_1})\Delta(G_{\alpha_2})\ldots\Delta(G_{\alpha_k}) + \Sigma\Delta(\Gamma_{\beta_1})\Delta(\Gamma_{\beta_2})\cdots\Delta(\Gamma_{\beta_s})\}, \quad (4)$$

где сумма берется по всевозможным разбиениям диаграммы Γ_α на обобщенные узлы Γ^β_i, а символ $M(\Gamma_\alpha)$ означает, что после того как вклад в скобках подсчитан, скажем, в виде

$$\delta(\Sigma k) f_{\Gamma_\alpha}(\ldots k \ldots),$$

его следует заменить на

$$\delta(\Sigma k)\, T^\nu_\omega f_{\Gamma_\alpha},$$

где T^ν_ω обозначает часть тейлоровского разложения функции $f_{\Gamma_\alpha}(\ldots k \ldots)$ вокруг произвольной точки $k = \omega$, а именно, сумму тех членов, степени которых не превышают числа $\nu(\Gamma_\alpha)$.

Так как $\Delta(G_i)$ задано, то условий а) и б) достаточно для определения $\Delta(\Gamma_\alpha)$.

Введем теперь основную для дальнейшего операцию $R(G_1 G_2 \cdots G_s)$ над диаграммой G согласно следующей формуле:

$$R(G_1G_2\ldots G_s)=\Delta(G_1)\,\Delta(G_2)\ldots\Delta(G_s)+\sum_{2\leqslant m\leqslant s-1}\Delta(\Gamma_1)\,\Delta(\Gamma_2)\ldots\Delta(\Gamma_m)+$$
$$+\Delta(G_1G_2\ldots G_s)\equiv\overline{R(G_1G_2\ldots G_s)}+\Delta(G_1G_2\cdots G_s), \qquad (5)$$

где сумма берется по всевозможным разбиениям диаграммы G на обобщенные узлы Γ_k; $G=\Gamma_1\Gamma_2\ldots\Gamma_m$; $\Gamma_k=G_{k_1}G_{k_2}\ldots G_{k_s}$. Символом $R(G)$ будем обозначать операцию $R(G_1G_2\ldots G_s)$, в которой за базисные узлы взяты просто точки x_i.

Имеет место соотношение:

$$R(G_1G_2\ldots G_s)=\Delta(G_1)\,R(G_2G_3\ldots G_s)+$$
$$+\sum P\left(\frac{2,3,\ldots,\nu_1}{\nu_1+1,\ldots,s}\right)\Delta(G_1G_2\ldots G_{\nu_1})\,R(G_{\nu_1+2}\ldots G_s)+\Delta(G_1G_2\ldots G_s), \qquad (6)$$

где $\sum P\left(\frac{2,3,\ldots,\nu_1}{\nu_1+1,\ldots,s}\right)$ означает сумму по всевозможным разбиениям множества $(2,3,\ldots,s)$ на два подмножества.

Доказательство этой формулы получается простой перестройкой выражения (5).

Для дальнейшего операцию $R(G_1G_2\ldots G_s)$ будет удобно записывать в виде

$$R(G_1G_2\ldots G_s|\ldots\Omega_\Gamma\ldots),$$

где $\Omega_\Gamma=(\ldots\omega\ldots)$ обозначают те произвольные точки, вокруг которых производится разложение в ряд Тейлора при подсчете $\Delta(\Gamma)$.

Условимся теперь через $R^*(G_1G_2\ldots G_s)$ записывать операциию R над диаграммой G^*, которая возникает из диаграммы G в результате добавления новой линии между базисными узлами G_i и G_k и при сопоставлении тех же чисел $\nu(\Gamma_\alpha)$ обобщенным узлам, что и в диаграмме G.

Для простоты рассуждений допустим, что эта линия соединяет узлы G_1 и G_2. Импульсное представление функции распространения линии 1—2 обозначим через $\Delta^c_{12}(t)$.

Имеет место следующая итерационная формула:

$$R(G_1G_2\ldots G_s|\ldots\Omega^*_\Gamma\ldots)=$$
$$=\int\Delta^c_{12}(t)\,R_{12}(G_1^t\,G_2^t\ldots G_s^t\,|\ldots\Omega^t_\Gamma\ldots)\,dt, \qquad (7)$$

где значок t вверху обозначает, что в R_{12} импульс k_1 следует заменить на k_1-t, импульс k_2 — на k_2+t, а Ω^t_Γ означает замену точки ω_1 на ω_1-t, а точки ω_2 — на ω_2+t.

Операция R_{12} определяется формулой

$$R_{12}(G_1G_2\ldots G_s|\ldots\Omega_\Gamma\ldots)=$$
$$=R(G_1G_2\ldots G_s)+\sum_{\Gamma'\subset G}R(G_1G_2\ldots G_s;\Gamma'|\ldots\Omega_\Gamma\ldots). \qquad (8)$$

Здесь $\Gamma'=G_{\alpha_1}G_{\alpha_2}\ldots G_{\alpha_k}$ — те слабосвязные диаграммы, которые после добавления новой линии между G_1 и G_2 становятся сильносвязными, а $R(G;\Gamma'\,|\,\Omega_\Gamma)$ означает операцию типа R над диаграммой G, в которой за базисные узлы взяты диаграмма Γ' и все остальные G_i, не вошедшие в Γ'.

При этом операция $\Delta(\Gamma')$ определяется формулой

$$\Delta(\Gamma') = -M(\Gamma')\overline{R(\Gamma'')},$$

т. е. $\Delta(\Gamma')$ подсчитывается так, как если бы новой линии между G_1 G_2 не было, а диаграмма Γ' была сильносвязная.

Формула (7) будет играть основную роль в дальнейшем. Ее доказательство основано на прямом подсчете с привлечением математической индукции.

Математический институт им. В. А. Стеклова
Академии наук СССР и
Институт математики Академии наук УССР

Поступило
29 X 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] G. C. Wick, Phys. Rev., **80**, № 2, 268 (1950). [2] Н. Н. Боголюбов, ДАН, **81**, №№ 5 и 6 (1951); **82**, № 2 (1952). [3] F. J. Dyson, Phys. Rev., **75**, 1736 (1949). [4] A. Salam, ibid., **82**, 217 (1951).