Доклады Академии наук СССР
1955. Том 100, № 1

МАТЕМАТИКА

Н. Г. ТУГАНОВ

О КОНГРУЕНЦИИ ЛИНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА В ТРЕХМЕРНОМ ПРОЕКТИВНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

(Представлено академиком П. С. Александровым 28 X 1954)

В работе рассматривается конгруенция (т. е. множество, зависящее от двух существенных параметров) линий второго порядка в трехмерном проективном пространстве. Исследование проводится методом подвижного репера и внешних дифференциальных форм (1).

1. Построение канонического репера конгруенции линий C^2. Три вершины репера A_1, A_2, A_3 выбираем в фокальных точках линии C^2, четвертая вершина A_4 находится на пересечении касательных плоскостей в точках A_1, A_2, A_3 к фокальным полостям (A_1), (A_2), (A_3) конгруенции. При этом вершины A_1, A_2, A_3 репера нормируем так, чтобы уравнение линии C^2 относительно репера приняло вид

$$x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_1 = 0.$$

Построенный репер конгруенции не является единственно возможным, указанным способом для линии C^2 конгруенции можно построить $C_6^3 = 20$ реперов.

2. Система уравнений, определяющих конгруенцию линий C^2. Конгруенция линий C^2 относительно построенного репера определяется системой уравнений:

$$\omega_1^2 + \omega_1^3 = 0; \quad \omega_2^3 + \omega_2^1 = 0; \quad \omega_3^1 + \omega_3^2 = 0:$$

$$[\omega_1^2; \theta_1] + [\omega_1^4; \omega_4^2 + \omega_4^3] = 0; \quad [\omega_2^3; \theta_2] + [\omega_2^4; \omega_4^3 + \omega_4^1] = 0; \tag{1}$$

$$[\omega_3^1; \theta_3] + [\omega_3^4; \omega_4^1 + \omega_4^2] = 0;$$

$$\theta_1 = \omega_2^2 - \omega_3^3 - 2\omega_1^2 + \omega_2^3 + \omega_3^1; \quad \theta_2 = \omega_3^3 - \omega_1^1 - 2\omega_2^3 + \omega_3^1 + \omega_1^2;$$

$$\theta_3 = \omega_1^1 - \omega_2^2 - 2\omega_3^1 + \omega_1^2 + \omega_2^3,$$

общее решение ее зависит от 6 произвольных функций 2 аргументов.

Этот произвол можно истолковать так, что посредством задания 6 произвольных поверхностей определяется конгруенция линий C^2, для которой они служат фокальными поверхностями. В системе (1) за независимые формы можно принять любые две из трех форм θ_1, θ_2, θ_3, которые связаны линейным соотношением $\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = 0$.

Пфаффовы формы, входящие в уравнения (1), хорошо связаны с конгруенцией. Так, уравнения $\omega_1^2 + \omega_1^3 = 0$, $\omega_2^3 + \omega_2^1 = 0$, $\omega_3^1 + \omega_3^2 = 0$ определяют, соответственно, фокальные полости (A_1), (A_2), (A_3). Уравнения $\omega_1^4 = 0$, $\omega_2^4 = 0$, $\omega_3^4 = 0$ определяют три фокальных семейства конгруенции. Уравнение $\omega_1^2 = 0$ определяет на полости (A_1) семейство линий, для которых ребро $A_1 A_4$ служит касательной в точке A_1; ана-

логично, уравнение $\omega_2^3 = 0$ ($\omega_3^1 = 0$) определяет на полости (A_2) (соответственно, (A_3)) семейство линий, которых касается ребро тетраедра A_2A_4 (A_3A_4). Касательная к семейству линий $\omega_1^4 = 0$ на полости (A_1) содержит точку $A_2 - A_3$, откуда вытекает простой способ построения касательных плоскостей к фокальным полостям конгруенции.

3. Фокальные семейства конгруенции. Конгруенция линий C^2 имеет 6 фокальных семейств, определяемых уравнением

$$\omega_1^4\omega_2^4\omega_3^4(\omega_3^4\theta_1\theta_2 + \omega_1^4\theta_2\theta_3 + \omega_2^4\theta_3\theta_1) = 0.$$

Координаты фокусов линии C^2 конгруенции, не являющихся вершинами репера, определяются посредством

$$\frac{x_1x_2}{\theta_3} = \frac{x_2x_3}{\theta_1} = \frac{x_3x_1}{\theta_2}$$

с учетом уравнения

$$\omega_3^4\theta_1\theta_2 + \omega_1^4\theta_2\theta_3 + \omega_2^4\theta_3\theta_1 = 0.$$

4. Условие, что две смежные линии C^2 конгруенции в пределе лежат на одной квадрике. Вообще, две смежные линии C^2 конгруенции в пределе не лежат на одной квадрике. Необходимое и достаточное условие, чтобы они лежали на одной квадрике, состоит в том, чтобы рассматриваемое направление было фокальным и притом сдвоенным; аналитически это условие выразится в виде

$$[\theta_1\theta_2] = 0.$$

Соприкасающаяся линейная конгруенция

Поставим задачу изображения конгруенции линий C^2 в проективном пространстве P_5. Этого достигнем путем построения соприкасающейся линейной конгруенции.

5. Соприкасающаяся линейчатая поверхность по заданному направлению конгруенции линии C^2. Рассмотрим две произвольные смежные линии C^2 конгуренции. Отнесем каждую из них к своему реперу и установим между точками их $M(x_1, x_2, x_3, 0)$ и $\overline{M}(X_1, X_2, X_3, 0)$ взаимно-однозначное соответствие посредством соотношений

$$X_1 = x_1 + \Delta_1, \quad X_2 = x_2 + \Delta_2, \quad X_3 = x_3 + \Delta_3,$$

где Δ_i — пфаффовы формы, связанные условием:

$$(x_2 + x_3)\Delta_1 + (x_3 + x_1)\Delta_2 + (x_1 + x_2)\Delta_3 = 0.$$

Соединяя соответственные точки M и $\overline{M}$ прямой, получим соприкасающуюся линейчатую поверхность вдоль направления, определяемого двумя смежными линиями C^2 (закон точечного соответствия определится ниже).

6. Соприкасающийся линейный комплекс конгруенции C^2 вдоль заданного направления ее. Потребуем, чтобы образующие соприкасающейся линейчатой поверхности принадлежали линейному комплексу. Между параметрами a_{ik} линейного комплекса, параметрами, определяющими соприкасающуюся линейчатую

поверхность, и величинами, относящимися к конгруенции C^2 и выбранному направлению ее, установится зависимость

$$(x_1\Delta_2 - x_2\Delta_1)\{(a_{34}-a_{42})x_1^2 + 2a_{34}x_1x_2 + (a_{14}+a_{34})x_2^2\} +$$
$$+ x_1^4(a_{23}\omega_1^4 + a_{34}\omega_1^2 - a_{42}\omega_1^2) + x_1^3x_2\{\cdots\} + x_1^2x_2^2\{\cdots\} + x_1x_2^3\{\cdots\} +$$
$$+ x_2^4(-a_{13}\omega_2^4 + a_{14}\omega_2^3 + a_{34}\omega_2^3) = 0.$$

Отсюда следует, что по любому заданному линейному комплексу можно для любого направления конгруенции C^2 построить соприкасающуюся линейчатую поверхность, принадлежащую этому линейному комплексу.

Обратное не имеет места.

7. Соприкасающаяся линейная конгруенция. Потребуем теперь, чтобы соприкасающаяся линейчатая поверхность принадлежала линейной конгруенции.

Для определения параметров a_{ik}, b_{ik} линейных комплексов, пересечение которых определяет соприкасающуюся линейную конгруенцию, получим систему уравнений:

$$a_{23}(b_{34}-b_{42}) = b_{23}(a_{34}-a_{42}); \qquad (1_1)$$
$$a_{13}(b_{14}+b_{34}) = b_{13}(a_{14}+a_{34}); \qquad (1_2)$$
$$a_{12}(b_{14}-b_{42}) = b_{12}(a_{14}-a_{42}); \qquad (1_3)$$
$$(a_{34}b_{42})\theta_1 = \omega_1^4\{(a_{12}b_{14}) - (a_{12}b_{34}) + (a_{13}b_{14}) + (a_{13}b_{12}) + 2(a_{23}b_{34})\}; \qquad (2_1)$$
$$(a_{14}b_{34})\theta_2 = \omega_2^4\{-(a_{12}b_{14}) - (a_{12}b_{34}) +$$
$$+ 2(a_{13}b_{14}) - (a_{14}b_{23}) + (a_{23}b_{34})\}; \qquad (2_2)$$
$$(a_{14}b_{42})\theta_3 = \omega_3^4\{2(a_{12}b_{14}) - (a_{13}b_{14}) + (a_{13}b_{42}) + (a_{14}b_{23}) + (a_{23}b_{34})\}; \qquad (2_3)$$
$$\omega_1^4\{\omega_2^4\theta_1 + (\omega_1^4 - \omega_3^4)\theta_2\}(a_{14}b_{34}) + \omega_1^4\omega_2^4\theta_2(a_{14}b_{42}) +$$
$$+ \omega_2^4(\omega_1^4\theta_2 + \omega_2^4\theta_1)(a_{34}b_{42}) = 0, \qquad (3)$$

где, например, $(a_{34}b_{42}) = a_{34}b_{42} - b_{34}a_{42}$.

Как следствие уравнений (2_{1-3}) получим уравнение

$$\omega_3^4\omega_1^4\theta_2(a_{14}b_{34}) + \omega_1^4\omega_2^4\theta_3(a_{14}b_{42}) - \omega_2^4\omega_3^4\theta_1(a_{34}b_{12}) = 0.$$

В общем случае, т. е. для произвольного направления конгруенции, полученная система уравнений определяет в проективном пространстве P_5 линейчатую поверхность, каждая прямолинейная образующая ее определяет пучок линейных комплексов a_{ik} (или, что то же, b_{ik}).

Пересечение любых двух комплексов этого пучка определит искомую соприкасающуюся линейную конгруенцию.

Полученный результат позволяет изучать конгруенцию линий C^2 посредством изображения ее в проективном пространстве P_5.

Томский государственный
университет

Поступило
26 X 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] С. П. Фиников, Метод внешних форм, М.—Л., 1948.