Доклады Академии наук СССР
1954. Том 100, № 1

МАТЕМАТИКА

К. К. МОКРИЩЕВ

О НЕКОТОРЫХ КЛАССАХ КРИВЫХ ПРОСТРАНСТВА ЛОБАЧЕВСКОГО

(Представлено академиком П. С. Александровым 1 XI 1954)

1. Д. Д. Мордухай-Болтовской ([1]) рассмотрел простейшие свойства кривых пространства Лобачевского, главные нормали которых являются главными нормалями других кривых. В настоящей заметке указываются другие свойства этих кривых и рассматриваются новые классы кривых пространства Лобачевского. Все вычисления выполнены в нормированных вейерштрассовых координатах. Значительное упрощение выкладок было достигнуто благодаря введению символа суммирования δ^{ij} $(i, j = 1, 2, 3, 4)$

$$\delta^{11} = \delta^{22} = \delta^{33} = -\delta^{44} = 1; \quad \delta^{ij} = 0 \text{ при } i \neq j.$$

Существенно были использованы основные формулы теории кривых пространства Лобачевского ([2], § 468) и следующие вспомогательные формулы ([2], § 458):

$$\bar{x}_i = \operatorname{ch}\frac{a}{k}\cdot x_i + \operatorname{sh}\frac{a}{k}\cdot \nu_i,$$

$$\bar{\nu}_i = \operatorname{sh}\frac{a}{k}\cdot x_i + \operatorname{ch}\frac{a}{k}\cdot \nu_i,$$

где x_i — координаты точки; ν_i — координаты плоскости, проходящей через точку x_i; $\bar{x}_i$ — координаты точки, лежащей на перпендикуляре, восстановленном в точке x_i к плоскости ν_i и находящейся от точки x_i на расстоянии, равном a; $\bar{\nu}_i$ — координаты плоскости, проходящей через точку $\bar{x}_i$ и перпендикулярной к прямой, соединяющей точки x_i и $\bar{x}_i$; k — параметр пространства Лобачевского.

2. Если главные нормали кривой (C) являются главными нормалями кривой $(\bar{C})$, то:

а) расстояние a между их соответственными точками и угол α между их соответственными нормальными плоскостями постоянны ([1]);

б) кривизна $\varkappa$ и кручение τ кривой (C) связаны линейным уравнением с постоянными коэффициентами ([1])

$$\varkappa - \operatorname{ctg}\alpha\cdot\tau - \frac{1}{k}\operatorname{cth}\frac{a}{k} = 0,$$

которое при $k \to \infty$ обращается в натуральное уравнение кривых Бертрана ([3]) евклидова пространства;

в) кривизны $\varkappa$ и $\bar{\varkappa}$ кривых (C) и $(\bar{C})$ в их соответственных точках связаны уравнением

$$\left(\operatorname{ch}\frac{a}{k} - k\varkappa\operatorname{sh}\frac{a}{k}\right)\left(\operatorname{ch}\frac{a}{k} + k\bar{\varkappa}\operatorname{sh}\frac{a}{k}\right) = \cos^2\alpha,$$

в силу которого, вводя посредством соотношения (4)

$$\varkappa = \frac{1}{k \operatorname{th} \frac{\rho}{k}}$$

радиус кривизны ρ и строя для соответственных точек C и $\overline{C}$ кривых (C) и $(\overline{C})$ их центры кривизны C_1 и $\overline{C}_1$, получим

$$(C\overline{C}C_1\overline{C}_1) = \frac{\operatorname{sh} \frac{CC_1}{k}}{\operatorname{sh} \frac{\overline{C}C_1}{k}} : \frac{\operatorname{sh} \frac{C\overline{C}_1}{k}}{\operatorname{sh} \frac{\overline{C}\,\overline{C}_1}{k}} = \frac{1}{\cos^2 \alpha},$$

т. е. сложное отношение двух соответственных точек кривых (C) и $(\overline{C})$ и соответствующих этим точкам центров кривизны есть величина постоянная. Отсюда при $k \to \infty$ получаем теорему Маннгейма (5);

г) произведение кручений τ и $\overline{\tau}$ в соответственных точках кривых (C) и $(\overline{C})$ есть постоянная положительная величина

$$\tau\overline{\tau} = \left(\frac{\sin \alpha}{k \operatorname{sh} \frac{a}{k}} \right)^2;$$

отсюда при $k \to \infty$ получаем теорему Шелля (6) для кривых Бертрана евклидова пространства.

3. Если нормали кривой (C), образующие с ее главными нормалями постоянный угол ω, являются бинормалями кривой $(\overline{C})$, то:

а) расстояние a между соответственными точками кривых (C) и $(\overline{C})$ имеет постоянное значение;

б) натуральное уравнение кривой (C) имеет вид

$$\cos^2 \omega \cdot \varkappa^2 + \tau^2 - \frac{2}{k} \operatorname{cth} \frac{2a}{k} \cdot \cos \omega \cdot \varkappa + \frac{1}{k^2} = 0;$$

в) при $\omega = 0$:

1) натуральное уравнение кривой (C) принимает вид

$$\varkappa^2 + \tau^2 - \frac{2}{k} \operatorname{cth} \frac{2a}{k} \cdot \varkappa + \frac{1}{k^2} = 0$$

и при $k \to \infty$ обращается в натуральное уравнение кривых Маннгейма (7) евклидова пространства;

2) натуральное уравнение кривой $(\overline{C})$ имеет вид

$$\overline{\tau} = \frac{1}{k} \operatorname{ctg} \frac{a}{k} \cdot \operatorname{tg} \left(\int \overline{\varkappa}\, d\overline{s} \right);$$

3) кручения τ и $\overline{\tau}$ кривых (C) и $(\overline{C})$ связаны соотношением

$$\tau\overline{\tau} = -\left(\frac{\sin \varphi}{k \operatorname{sh} \frac{a}{k}} \right)^2,$$

где φ есть угол между соответственными нормальными плоскостями;

г) при $\omega = \pi/2$

$$\tau^2 + \frac{1}{k^2} = 0,$$

следовательно, в пространстве Лобачевского не существует действительной кривой, бинормали которой были бы бинормалями другой кривой.

4. Предположим, что с основным репером кривой (C) неизменно связана прямая d, тогда:

а) если на прямой d, не проходящей через вершину репера кривой (C) и не ортогональной ее касательной и ее главной нормали, существует точка, которая движется ортогонально к d, то кривизна и кручение кривой (C) будут связаны линейным уравнением с постоянными коэффициентами;

б) если d огибает некоторую кривую, то натуральное уравнение кривой (C) будет иметь вид:

$$(\cos\lambda\cos\beta - \cos\alpha\cos\mu)\cos\nu\cdot\varkappa^2 -$$
$$- [(\cos\lambda\cos\beta - \cos\alpha\cos\mu)\cos\lambda + (\cos\mu\cos\gamma - \cos\beta\cos\nu)\cos\nu]\varkappa\tau +$$
$$+ (\cos\mu\cos\gamma - \cos\beta\cos\nu)\cos\lambda\cdot\tau^2 +$$
$$+ \left[(\cos\lambda\cos\beta - \cos\alpha\cos\mu)(\cos\mu\cos\gamma - \cos\beta\cos\nu)\operatorname{th}\frac{a}{k} - \right.$$
$$\left. - \cos\lambda\cos\nu\operatorname{cth}\frac{a}{k}\right]\frac{\varkappa}{k} +$$
$$+ \left\{[(\cos\lambda\cos\beta - \cos\alpha\cos\mu)^2 + (\cos\lambda\cos\gamma - \cos\alpha\cos\nu)^2]\operatorname{th}\frac{a}{k} - \right.$$
$$\left. - (\cos^2\mu + \cos^2\nu)\operatorname{cth}\frac{a}{k}\right\}\frac{\tau}{k} - (\cos\mu\cos\gamma - \cos\beta\cos\nu)\frac{\cos\lambda}{k^2} = 0,$$

где a; α, β, γ; λ, μ, ν — постоянные, характеризующие положение прямой d относительно репера кривой (C). При $k \to \infty$ это уравнение обращается в натуральное уравнение кривых Чезаро [8] евклидова пространства;

в) можно установить классификацию кривых пространства Лобачевского, определяемых натуральными уравнениями вида

$$A\varkappa^2 + B\varkappa\tau + C\tau^2 + D\varkappa + E\tau + F = 0,$$

где $A, B, \ldots, F$ — постоянные, в зависимости от положения соответствующей прямой d относительно основного репера кривой.

Ростовский государственный университет
им. В. М. Молотова

Поступило
27 VIII 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Д. Д. Мордухай-Болтовской, ДАН, 69, № 6 (1949). [2] L. Bianchi, Lezioni di geometria differenziale, 2, II, 1924. [3] Bertrand, J. de Math., 15 (1850). [4] Д. Д. Мордухай-Болтовской, Матем. сборн., 30 (72) : 3 (1952). [5] Mannheim, C. R., 85, 212 (1877). [6] Schell, Allgemeine Theorie der Kurven doppelter Krümmung in rein geometrischer Darstellung, Leipzig, 1898. [7] Mannheim, C. R., 85, 847 (1877). [8] Cesaro, Riv. di Math., 2 (1892).