Доклады Академии наук СССР
1955. Том 100, № 1

МАТЕМАТИКА

А. ВИТУШКИН

ЗАМЕЧАНИЯ К ДАННОМУ К. СИТНИКОВЫМ РЕШЕНИЮ ОДНОЙ ЗАДАЧИ УРЫСОНА

(Представлено академиком П. С. Александровым 11 VI 1954)

1. Постановка вопроса. П. С. Урысон поставил вопрос о том, всякое ли $(n-1)$-мерное множество в n-мерном евклидовом пространстве R^n разрезает некоторый шар U пространства R^n в том смысле, что в $U \setminus A$ имеется пара точек, которую нельзя связать никаким континуумом, лежащим в $U \setminus A$. К. Ситников недавно (1) дал отрицательное решение задачи Урысона даже при $n=3$. В то же время из общей теоремы о препятствиях Ситникова (2) следует, что проблема Урысона получает положительное решение, если самое разрезание шара понимать не в теоретико-множественном, а в гомологическом смысле, как существование нульмерного цикла, не гомологично нулю в $U \setminus A$ (в смысле, установленном Ситниковым). Однако естественно попытаться все же дать проблеме Урысона положительное теоретико-множественное решение, называя множество A слабо разрезающим шар U, если в $U \setminus A$ существует пара точек, которую нельзя соединить никакой простой дугой, лежащей в $U \setminus A$. Мы покажем, что и эта попытка обречена на неудачу, так как:

В трехмерном евклидовом пространстве R^3 существует нульмерное множество A и трехмерный шар U, обладающие тем свойством, что в $U \setminus A$ имеются две точки, которые нельзя связать в $U \setminus A$ никакой простой дугой.*

Этим примером подчеркивается окончательный характер результата Ситникова, не поддающегося, повидимому, никакому усилению.

2. Построение множества A. В пространстве R^3 берем прямоугольную систему координат и строим по индукции замкнутые множества K_m, $m=1, 2, \ldots$, лежащие в плоскости $y=0$. Обозначим через H_1 канторово совершенное множество, лежащее на отрезке $I=[0; 1]$ оси z. За множество K_1 примем множество всех таких точек плоскости $y=0$, проекция каждой из которых на ось z принадлежит множеству H_1, а координата x удовлетворяет неравенству $0 \leqslant x \leqslant 1$. Пусть замкнутые множества $K_1, \ldots, K_m$ уже построены (каждое из этих множеств обладает рядом свойств, формулировка которых будет приведена ниже). Обозначим через H_{m-1} проекцию K_{m-1} на ось z. Так как K_{m-1} замкнуто, то H_{m-1} также замкнуто, а множество $I \setminus H_{m-1}$ открыто и, следовательно, является суммой счетного множества попарно не пересекающихся интервалов G_i^{m-1} длины $\lambda_i^{(m-1)}$, $i=1, 2, \ldots$. Положим $\lambda^{(m-1)} = \max \lambda_i^{(m-1)}$ и обозначим через $r_n^{m-1} = (a_n^{(m-1)}, b_n^{(m-1)})$, $n=1, 2, \ldots, n_{m-1}$, те из интервалов

* Аналогичный пример можно построить и на плоскости, однако пространственный пример дает, очевидно, более сильный результат (построенное в R^3 нульмерное множество ведет себя в известном смысле как поверхность, тогда как в R^2 оно будет обладать лишь свойствами линии).

G_i^{m-1}, которые имеют длину $\lambda^{(m-1)}$ (через n_{m-1} обозначено число таких интервалов). Множества K_i, $i = 1, \ldots, m-1$, предполагаются удовлетворяющими условию:

(А). Пересечения множества K_{m-1} с плоскостями $z = a_n^{(m-1)}$ и $z = b_n^{(m-1)}$ суть отрезки, проектирующиеся на ось x в один и тот же отрезок $[c_n^{(m-1)}, d_n^{(m-1)}]$ длины $1/2^{m-1}$.

Обозначим через H_n^{m-1} сжатое в $1/\lambda^{(m-1)}$ раз канторово совершенное множество, лежащее на r_n^{m-1}, а через Q_n^m — множество всех таких точек плоскости $y = 0$, проекция каждой из которых содержится в H_{m-1}, а координата x удовлетворяет неравенству $c_n^{'(m-1)} \leqslant x \leqslant d_n^{'(m-1)}$, где $c_n^{'(m-1)}$ и $d_n^{'(m-1)}$ суть константы, определяемые следующим образом: $c_n^{'(m-1)} = c_n^{(m-1)}$ и $d_n^{'(m-1)} = {}^1/_2 (c_n^{(m-1)} + d_n^{(m-1)})$, если m нечетно; $c_n^{'(m-1)} = {}^1/_2 (c_n^{(m-1)} + d_n^{(m-1)})$ и $d_n^{'(m-1)} = d_n^{(m-1)}$, если m четно. Положим

$$K_m = \bigcup_{1 \leqslant i \leqslant m-1} K_i \cup \bigcup_{1 \leqslant n \leqslant n_{m-1}} Q_n^m.$$

Нетрудно проверить, что K_m есть замкнутое множество, лежащее в плоскости $y = 0$ и удовлетворяющее условию (А), так что индукция идет дальше. Обозначим через Φ^0 замыкание множества $\bigcup_{m=1}^{\infty} K_m$, через Φ_n^0 — образ множества Φ_0 при отображении $x' = x$, $y' = y$, $z' = z + n$, $n = 1, 2, \ldots$ Положим $\Sigma = \bigcup_{n=0}^{\infty} \Phi_n^0$. Обозначим через Ψ множество всех таких точек из R^3, проекция каждой из которых на плоскость $y = 0$ содержится в Σ, через Ψ_h^n — образ множества Ψ при отображении $x' = \frac{x}{n} + \frac{h}{n}$, $y' = y$, $z' = z$ (где $n = 1, 2, \ldots$; $\pm h = 0, 1, 2, \ldots$); через ψ_h^n обозначим проекцию Ψ_h^n на плоскость $y = 0$, через C_h^n — образ Ψ_h^n при повороте пространства около оси z на угол $\pi/2$, через τ_q^n — плоскость $z = q/n$ ($n = 1, 2, \ldots$; $\pm q = 0, 1, 2, \ldots$). Положим:

$$B = \bigcup_{1 \leqslant n < \infty}^{\infty} \bigcup_{-\infty < h < \infty} (\Psi_h^n \cup C_h^n) \cup \bigcup_{1 \leqslant n < \infty} \bigcup_{-\infty < q < \infty} \tau_q^n.$$

Положим, наконец, $A = R^3 \setminus B$.

Итак, множество A построено.

3. Докажем, что множество A обладает указанным в начале заметки свойством.

Лемма 1. *Пусть a_1 и a_2 суть точки из Ψ_h^n и $\psi_h^n(a_1, a_2)$ — подмножество множества Ψ_h^n, определяемое неравенством $z(a_1) \geqslant z \geqslant z(a_2)$, где $z(a_i)$ — координата z точки a_i. Тогда $\psi_h^n(a_1, a_2)$ есть локально-несвязный континуум, в котором нет никакого отличного от него подконтинуума, содержащего точки a_1 и a_2.*

Доказательство этой леммы не представляет затруднений.

Лемма 2. *Пусть b и c — две точки, координаты z которых не равны между собою: $z(b) \neq z(c)$. Пусть $P = \overline{bc}$ — простая дуга с концами b и c. Тогда для любых двух точек ξ и η дуги P существует в P такая пара точек b' и c' (отличных от концов b и c дуги P), что $z(b') \neq z(c')$ и что лежащая в P дуга $\overline{b'c'}$ не содержит точек из Ψ_h^n.*

Доказательство. Положим $\gamma = \Psi_h^n \cap P$ и $\delta = P \setminus \gamma$. Так как γ замкнуто, то δ открыто в P и, следовательно, является суммой попарно не пересекающихся дуг p_i с концами из $\Psi_h^n \cup b \cup c$. Для определенности будем считать, что p_1 и p_2 суть дуги, имеющие общий конец с дугой $\overline{bc}$. Предположим, что утверждение леммы 2 неверно. Тогда для всякой пары точек b_0 и c_0 из p_i (где i фиксировано) имеем $z(b_0) = z(c_0)$, т. е. p_i целиком содержится в плоскости τ_i, определяемой уравнением $z = z(p_i)$. Пусть b_i и c_i суть концы дуги p_i, а σ_i — прямолинейный отрезок $\overline{b_i c_i}$. Положим $P' = \gamma \cup \bigcup_{3 \leqslant i < \infty} \sigma_i$. Так как дуги p_i попарно не пересекаются и лежат на простой дуге P, то P' есть локально-связный континуум. Из определения Ψ_h^n (см. построение множества A) следует, что $\Psi_h^n \cap \tau_i$ есть множество, лежащее в плоскости τ_i, ограниченное парой прямых, параллельных оси y; поэтому, если $b_i \cup c_i \subset \Psi_h^n \cap \tau_i$, то $\sigma_i \subset \Psi_h^n \cap \tau_i \subset \Psi_h^n$, а тогда проекция P_0 множества P' на плоскость $y = 0$ содержится в Ψ_h^n.

Множество P_0, будучи проекцией локально-связного множества P', локально-связно; при этом, как уже указывалось: $P_0 \subset \psi_h^n$. Пусть d_1 и d_2 суть точки из γ, лежащие, соответственно, в плоскостях $z = z(b)$ и $z = z(c)$, а a_1 и a_2 — проекции этих точек на плоскость $y = 0$. Так как $z(b) \neq z(c)$, то и $z(a_1) \neq z(a_2)$. Ясно, что P_0 является подконтинуумом континуума $\psi_h^n(a_1, a_2)$ (см. лемму 1), содержащим точки a_1 и a_2, следовательно, $P_0 = \psi_h^n(a_1, a_2)$. Включение $P_0 \subset \psi_h^n$ и лемма 1 противоречат друг другу; это противоречие доказывает лемму 2.

Лемма 3. *Всякая простая дуга $P = \overline{bc}$, для которой $z(b) \neq z(c)$, пересекается множеством A.*

Доказательство. Пусть μ_1 — пустое множество, а μ_i, $i = 2, 3, \ldots$, суть множества τ_q^n, Ψ_h^n, C_h^n, занумерованные в одну последовательность. Тогда $B = \bigcup_{1 \leqslant i < \infty} \mu_i$. Возьмем упомянутую в лемме 3 дугу $P = \overline{bc}$. Покажем, что в P можно найти такую строго убывающую последовательность дуг $\pi_i = \overline{b_i c_i}$ с концами, отличными (при $i \neq 1$) от b и c, что $z(b_i) = z(c_i)$ и что

(Б). $\pi_i \cap \mu_i$ пусто (для любого i).

Положим $\pi_1 = P$. Пусть построены π_i при $i \leqslant n - 1$, удовлетворяющие условию (Б). Если μ_n есть множество типа Ψ_h^n или C_h^n, то, в силу леммы 2, на π_{n-1} существует дуга π_n, удовлетворяющая условию (Б). Если μ_n есть плоскость τ_q^n, то такая дуга тоже существует.

Так как дуги π_i образуют строго убывающую последовательность, то существует точка a, принадлежащая всем этим дугам и, следовательно, не принадлежащая множеству $\bigcup_i \mu_i = B$.

Лемма 3 доказана.

Лемма 4. *Множество A нульмерно.*

Доказательство. Возьмем $a \in A$ и $\varepsilon > 0$ произвольно. Покажем, что существует ε-окрестность ω точки a с границей, не содержащей точек множества A. Берем столь большое N, что $3/N < \varepsilon/3$; числа h_1, h_2, h_3, h_4, q_1, q_2 выберем так, чтобы

$$x(a) - \frac{\varepsilon}{3} < \frac{h_1}{N} < \frac{h_1 + 1}{N} < x(a) < \frac{h_2}{N} < \frac{h_2 + 1}{N} < x(a) + \frac{\varepsilon}{3};$$

$$y(a) - \frac{\varepsilon}{3} < \frac{h_3}{N} < \frac{h_3 + 1}{N} < y(a) < \frac{h_4}{N} < \frac{h_4 + 1}{N} < y(a) + \frac{\varepsilon}{3};$$

$$z(a) - \frac{\varepsilon}{3} < \frac{q_1}{N} < z(a) < \frac{q_2}{N} < z(a) + \frac{\varepsilon}{3}.$$

Положим $F = \Psi^n_{h_1} \cup \Psi^n_{h_2} \cup C^n_{h_3} \cup C^n_{h_4} \cup \tau^n_{q_1} \cup \tau^n_{q_2}$. Из определения Ψ^n_h нетрудно вывести, что Ψ^n_h разделяет точки ξ' и ξ'', если $x(\xi') > \frac{h+1}{n} > \frac{h}{n} > x(\xi'')$ (аналогичные неравенства имеют место для C^n_h и τ^n_q). Отсюда и из определения F следует, что компонента ω множества $R^3 \setminus F$, содержащая точку a в качестве внутренней точки, имеет диаметр $d < \sqrt{3(\varepsilon/3)^2} < \varepsilon$. Граница области ω состоит из точек множества F и, следовательно, не пересекается с A.

Лемма 4 доказана. Из лемм 3 и 4 следует, что множество A обладает указанным в начале заметки свойством.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
11 VI 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] К. Ситников, ДАН, 94, № 6, 1007 (1954). [2] К. Ситников, ДАН, 83, № 1, 31 (1952).