Доклады Академии Наук СССР
1954. Том XCIX, № 4

ФИЗИКА

Ю. В. НОВОЖИЛОВ

ПРИЧИННЫЕ ОПЕРАТОРЫ В КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ

(Представлено академиком В. А. Фоком 13 VII 1954)

Причинность принадлежит к числу таких же общих положений, необходимых в любой теории, как, например, вещественность физических величин. Как известно, требование вещественности средних значений ограничивает эрмитовскими операторами те операторы, которые можно сопоставлять физическим величинам. Принцип причинности также налагается на операторы в квантовой теории, связь которых с видом операторов поля до сих пор еще не исследовалась. Поэтому представляет интерес построение операторов, удовлетворяющих условиям причинности. Такие операторы мы будем называть причинными операторами. Их можно было бы также назвать операторами, упорядочивающимися во времени.

Для простоты будет рассмотрен случай электронно-позитронного поля (операторы поля ψ, причинные операторы χ), взаимодействующего с полем нейтральных (скалярных или псевдоскалярных) частиц (операторы поля φ, причинные операторы Φ).

Пренебрежем временно обратимостью квантовой теории поля. Тогда, согласно принципу причинности, последующие состояния поля должны определяться только предшествующими, т. е. между функционалами состояний поля $\Omega'(t_2)$ и $\Omega(t_1)$ в моменты времени t_2 и t_1 возможна лишь связь типа $\Omega'(t_2) = S(t_2 t_1)\Omega(t_1)$, если $t_2 > t_1$. Так как оператор S зависит от операторов поля φ и ψ, то времена операторов поля, действующих на функционал состояния, должны быть не меньше времени этого функционала, т. е. возможно рассмотрение только матричных элементов операторов поля типа ($x_0 \equiv t$)

$$(\Omega'^{*}(t_2), \varphi(x)\Omega(t_1)) \equiv (t_2 | \varphi(x) | t_1), \quad t_2 \geqslant t \geqslant t_1. \tag{1}$$

Из (1) следует, что в согласии с принципом причинности при движении вперед во времени (от меньших времен к бо́льшим) можно рассматривать только хронологические произведения операторов поля

$$(\Omega'^{*}(t_2), \psi(x')\bar{\psi}(x'')\ldots\Omega(t_1)), \quad t_2 > t' > t'' > \ldots > t_1 \tag{2}$$

(и аналогично для операторов $\varphi(x)$), т. е. такие произведения, в которых последовательность действий операторов на функционал по их положению совпадает с последовательностью времен операторов.

Рассмотрим теперь движение назад во времени (от бо́льших времен к меньшим). Ввиду унитарности оператора S в этом случае возможны только антихронологические произведения операторов поля:

$$(\Omega(t_1), \ldots, \psi(x')\bar{\psi}(x'')\ldots\Omega(t_2)), \quad t_1 < t' < t'' < \ldots < t_2. \tag{3}$$

При отражении времени $\tilde{t} = -t$, $\tilde{x}_k = x_k$, $k = 1, 2, 3$, уравнения квантовой теории поля сохраняют свой вид (см., например, [1]), если от операторов ψ, φ и функционалов Ω прямого времени t перейти к операторам $\tilde{\psi}$, $\tilde{\varphi}$ и функционалам $\tilde{\Omega}$ обращенного времени $\tilde{t}$:

$$\tilde{\Omega} = R\Omega^*, \quad \tilde{\psi} = \psi^{\mathrm{T}}, \quad \tilde{\varphi} = \varphi^{\mathrm{T}}, \tag{4}$$

где значок т означает транспонированный оператор; $\bar{\psi} = \psi^* \gamma_4$. $R = \exp\left(i \int \bar{\psi} \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \psi \, d^3x\right)$. Условия (1) — (3) также сохраняют свой вид, будучи выражены посредством $\tilde{\psi}(\tilde{x})$, $\tilde{\varphi}(\tilde{x})$ и $\tilde{\Omega}(\tilde{t})$.

Таким образом, согласно (1)—(3) принцип причинности требует, чтобы направление движения во времени для операторов поля и функционалов всегда было одинаково. Разумеется, направление движения во времени всегда является определенным.

Обычный способ определения зависящих от времени операторов поля $\psi(x)$ и $\varphi(x)$ не удовлетворяет принципу причинности. При обычном определении операторы поля подчиняются только уравнениям движения, а направление движения по времени не задается, так что предполагаются возможными и запаздывающие и опережающие действия при заданном направлении движения во времени для функционала. Например, перестановочные соотношения для обычных операторов поля имеют вид *

$$[\varphi(x), \varphi(x')] = -i\Delta(x - x'), \quad \{\bar{\psi}_\alpha(x), \psi_\beta(x')\} = -iS_{\beta\alpha}(x' - x), \tag{5}$$

который предполагает возможность комбинаций $\varphi(x)\varphi(x')\Omega(t_1)$ при $t < t'$, $t > t_1$, $t' > t_1$, в которых оператор $\varphi(x')$, относящийся к более позднему моменту времени, действует на функционал $\Omega(t_1)$ прежде, чем оператор $\varphi(x)$.

Ввиду унитарности оператора S построение причинных операторов поля достаточно провести для движения вперед во времени. Согласно (1)—(3) причинные операторы должны совпадать с обычными операторами поля, если совпадают направления движения во времени для операторов и функционалов.

Рассмотрим движение вперед во времени. Условия причинности (1), (2) и условие релятивистской инвариантности формализма будут выполнены, если мы введем причинные операторы $\chi(x)$ и $\Phi(x)$ при помощи формул:

$$(t_2|\chi(x)|t_1) = \begin{cases} (t_2|\psi(x)|t_1), & t_2 > t > t_1; \\ (t_1|\psi(x)|t_2), & t_2 < t < t_1; \end{cases} \tag{6а}$$

$$(t_2|\bar{\chi}(x)|t_1) = \begin{cases} (t_2|\bar{\psi}(x)|t_1), & t_2 > t > t_1; \\ -(t_1|\bar{\psi}(x)|t_2), & t_2 < t < t_1; \end{cases} \tag{6б}$$

$$(t_2|\Phi(x)|t_1) = \begin{cases} (t_2|\varphi(x)|t_1), & t_2 > t > t_1; \\ (t_1|\varphi(x)|t_2), & t_2 < t < t_1. \end{cases} \tag{6в}$$

Отметим, что в силу (4) при $t_2 < t < t_1$

$$(t_2|\chi(x)|t_1) = (\tilde{t}_2|\bar{\psi}(\tilde{x})|\tilde{t}_1); \quad (t_2|\bar{\chi}(x)|t_1) = (\tilde{t}_2|\bar{\tilde{\chi}}(\tilde{x})|\tilde{t}_1).$$

---

* В определении сингулярных функций Δ, Δ_F, S, S^F мы следуем книге [2].

Различие между причинными и обычными операторами можно пояснить на следующем примере. Пусть в гейзенберговском представлении известны операторы поля для положительных времен при прямом направлении времени. Тогда возможны два различных способа определения операторов ψ и φ в области отрицательных времен. Во-первых, можно найти значения ψ и φ для отрицательных времен по значениям ψ и φ для положительных времен при помощи опережающих решений. Во-вторых, значения ψ и φ в области отрицательных времен можно получить отражением времени. В классическом случае оба способа совпадают. В квантовой теории эти способы различны. Первый способ, соответствующий обычному определению операторов поля, использует унитарное преобразование операторов ψ и φ от положительных времен к отрицательным. Второй способ, соответствующий определению причинных операторов, основывается на отражении времени, которое не является унитарным преобразованием и сопровождается изменением перестановочных соотношений.

Операторы χ и Φ удобно представить в виде суммы рождающих χ^c, Φ^c и поглощающих χ^a, Φ^a частей: $\chi = \chi^a + \chi^c$; $\Phi = \Phi^a + \Phi^c$. Связь операторов χ^a, Φ^a, χ^c, Φ^c с положительно-частотными χ^{c+1}, Φ^{c+1} и отрицательно-частотными χ^{c-1} Φ^{c-1} частями операторов χ и Φ зависит от соотношения между временами операторов и функционала. Согласно (6) в случае, когда время оператора больше времени функционала, выполняются обычные соотношения:

$$\chi^a = \chi^{c+1}, \quad \chi^c = \chi^{c-1}; \qquad \Phi^a = \Phi^{c+1}, \quad \Phi^c = \Phi^{c-1}, \tag{7}$$

а если время оператора меньше времени функционала:

$$\chi^a = \chi^{c-1}, \quad \chi^c = \chi^{c+1}; \qquad \Phi^a = \Phi^{c-1}, \quad \Phi^c = \Phi^{c+1}. \tag{8}$$

Очевидно, что все рождающие и все поглощающие операторы в отдельности коммутируют или антикоммутируют: $[\Phi^a(x), \Phi^a(x')] = 0$, $[\Phi^c(x), \Phi^c(x')] = 0$, $\{\chi^c(x), \bar{\chi}^c(x')\} = 0$, $\{\chi^a(x), \chi^a(x')\} = 0$ и т. д.

Покажем теперь, что формулы (6) полностью определяют операторы χ, $\bar{\chi}$ и Φ, т. е. что формулы (6) дают возможность выразить в любом случае эти операторы посредством операторов рождения и поглощения. Для этого достаточно показать, что формулы (6) позволяют найти действие произведений операторов χ, $\bar{\chi}$ или Φ на функционалы заданного направления времени независимо от соотношения между временами операторов. Но операторы χ, $\bar{\chi}$ и Φ можно всегда определить по (7) в случае нормального произведения (операторы рождения находятся слева от операторов поглощения). Приведение к нормальному произведению произвольного произведения операторов можно осуществлять последовательно при помощи перестановочных соотношений между рождающими и поглощающими операторами

$$[\Phi^a(x), \Phi^c(x')] = \langle \Phi^a(x)\, \Phi^c(x') \rangle_0, \tag{9}$$

$$\{\chi^a(x), \bar{\chi}^c(x')\} = \langle \chi^a(x) \chi^c(x') \rangle_0; \quad \{\chi^c(x), \bar{\chi}^a(x')\} = \langle \bar{\chi}^a(x') \chi^c(x) \rangle_0, \tag{10}$$

где $\langle A \rangle_0$ — среднее значение оператора A в вакуумном состоянии. Из (6) и (4) имеем (Ω_0 — функционал вакуума): при $t > t'$ $\langle \Phi(x)\, \Phi(x') \rangle_0 = (\Omega_0^*, \varphi(x) \varphi(x')\, \Omega_0)$; при $t < t'$ $\langle \Phi(x)\, \Phi(x') \rangle_0 = (\Omega_0^*, \tilde{\varphi}(x)\, \tilde{\varphi}(x')\, \Omega_0 = (\Omega_0^*, \varphi(x') \varphi(x)\, \Omega_0)$, откуда $\langle \Phi(x)\, \Phi(x') \rangle_0 = \langle \Phi(x')\, \Phi(x) \rangle_0$. Для операторов χ и $\bar{\chi}$ находим: при $t > t'$ $\langle \chi(x) \bar{\chi}(x') \rangle_0 = (\Omega_0^*, \psi(x)\, \bar{\psi}(x')\, \Omega_0)$, при

$t<t'$ $\langle\chi(x)\bar{\chi}(x')\rangle_0=(\tilde{\Omega}_0^*, \psi(\tilde{x})\bar{\psi}(\tilde{x}')\tilde{\Omega}_0)=-(\Omega_0^*, \bar{\psi}(x')\psi(x)\Omega_0)$; аналогичным образом получаем $\langle\bar{\chi}(x')\chi(x)\rangle_0=\langle\bar{\psi}(x')\psi(x)\rangle_0$ при $t'>t$ и $\langle\bar{\chi}(x')\chi(x)\rangle_0=-\langle\psi(x)\bar{\psi}(x')\rangle_0$ при $t'<t$, откуда находим $\langle\chi(x)\bar{\chi}(x')\rangle_0=-\langle\chi(x')\chi(x)\rangle_0$.

Подставив полученные соотношения для вакуумных средних значений в (9) и (10), мы приходим к перестановочным соотношениям:

$$[\Phi(x), \Phi(x']=0, \quad \{\chi(x), \bar{\chi}(x')\}=0. \tag{11}$$

Если $\Phi(x)$ и $\chi(x)$ удовлетворяют уравнениям движения для свободных полей, то $\langle\Phi(x)\Phi(x')\rangle_0=\frac{1}{2}\Delta_F(x-x')$, $\langle\chi_\alpha(x)\bar{\chi}_\beta(x')\rangle_0=-\frac{1}{2}S^F_{\alpha\beta}(x-x')$, и тогда из (9)—(10) явствует, что в этом случае перестановочные соотношения между рождающими и поглощающими частями операторов поля имеют вид:

$$[\Phi^a(x), \Phi^c(x')]=\tfrac{1}{2}\Delta_F(x-x'), \tag{12а}$$

$$\{\chi^a_\alpha(x), \bar{\chi}^c_\beta(x')\}=-\tfrac{1}{2}S^F_{\alpha\beta}(x-x')=-\{\chi^c_\alpha(x), \bar{\chi}^a_\beta(x')\}. \tag{12б}$$

Из соотношений (11) следует, что любое произведение операторов χ, $\bar{\chi}$ или Φ при действии на функционал заданного направления времени эквивалентно (с точностью до знака для произведений χ и $\bar{\chi}$) хронологическому произведению.

Результат (11) можно было ожидать. Функции $\Delta(x-x')$ и $S(x-x')$ в перестановочных соотношениях (5) для обычных операторов отличны от нуля только для временно-подобных интервалов между x и x', что означает возможность причинной связи между событиями в x и x'. Но эта связь уже учтена в определении операторов χ, $\bar{\chi}$ и Φ.

Причинные операторы для электромагнитного поля уже вводились по существу ранее [3] в методе функционалов Фока при рассмотрении условий, необходимых для приведения системы Фока к ковариантному виду [4]. Введение таких операторов было необходимо, чтобы в рамках метода функционалов можно было учитывать требования теории позитрона, не используя явно схемы вторичного квантования для электронно-позитронного поля и не рассматривая отдельно переходы в состояния с отрицательной и положительной энергией.

Можно надеяться, что введение причинных операторов окажется полезным при исследовании трудностей современной квантовой теории поля. Вместо обычной теории поля можно рассматривать теорию поля с причинными операторами, исходные уравнения которой содержат операторы χ, $\bar{\chi}$ и Φ вместо ψ, $\bar{\psi}$ и φ. Разумеется, такая теория должна привести к тем же результатам, что и обычная теория, в которой требования причинности учитываются при помощи краевых условий и условий совместности. Однако в теории с причинными операторами возможно введение взаимодействия более общего типа.

Ленинградский государственный университет
им. А. А. Жданова

Поступило
10 VI 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] J. Schwinger, Phys. Rev., 82, 914 (1951). [2] А. И. Ахиезер, В. Б. Берестецкий, Квантовая электродинамика, 1953. [3] Ю. В. Новожилов, ЖЭТФ, 22, 264 (1952). [4] Ю. В. Новожилов, Диссертация, ЛГУ, 1952; ДАН, 83, 207 (1952).