

М. Я. АЗБЕЛЬ

ПРОВОДИМОСТЬ ПЛЕНОК В ПРОДОЛЬНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

(Представлено академиком Л. Д. Ландау 20 IX 1954)

В настоящей работе определяется эффективная проводимость металлической пленки $0 \leq z \leq d$ в постоянном магнитном поле $\mathbf{H}$. Для простоты магнитное поле $\mathbf{H}$ считается параллельным электрическому, так что поле Холла отсутствует.

Электроны в металле описываются функцией распределения $f(z, \mathbf{v})$ *, которая удовлетворяет кинетическому уравнению

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial z} v_z + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} \left\{ e\mathbf{E} + \frac{e}{c} [\mathbf{vH}] \right\} = - \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{\text{ст}}; \quad \mathbf{v} = \nabla_{\mathbf{p}} \varepsilon(\mathbf{p}) \quad (1)$$

с обычно принимаемыми условиями на границах пленки (2):

$$f(n\mathbf{v}) = qf(-n\mathbf{v}), \quad n\mathbf{v} > 0. \quad (2)$$

Здесь и далее $f_0(\varepsilon)$ — равновесная функция распределения; ε , $\mathbf{p}$ и $\mathbf{v}$ — энергия, импульс и скорость электронов; ε_0 — граничная фермиевская энергия; $(\partial f / \partial t)_{\text{ст}}$ — интеграл столкновений, который мы будем записывать в виде $(\partial f / \partial t)_{\text{ст}} = (f - f_0) / \tau$ (τ — среднее время свободного пробега электронов); q — коэффициент отражения электронов от поверхности; $\mathbf{n}$ — внутренняя нормаль к поверхности.

Дисперсия (связь ε с $\mathbf{p}$) рассматривается в виде:

$$\varepsilon = \frac{p_x^2}{2m_x} + \frac{p_y^2}{2m_y} + \frac{p_z^2}{2m_z}. \quad (3)$$

Ось Oz выбранной нами системы координат совпадает с одной из главных осей тензора эффективных масс.

Линеаризуем уравнение (1), положив

$$f = f_0 - el_z \sqrt{\frac{m_z}{m_x}} \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} \psi. \quad (4)$$

Получим:

$$\frac{\partial \psi}{\partial \xi} \sin \theta \sin \varphi + \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} + \gamma \psi = \gamma \cos \theta \cdot E_x(\xi). \quad (5)$$

Здесь предполагается, что $\mathbf{E}$ направлено по главной оси Ox тензора эффективных масс, и введены обозначения:

$$\mathbf{p} = (\sqrt{2m_x\varepsilon} \cos \theta, \sqrt{2m_y\varepsilon} \sin \theta \cos \varphi, \sqrt{2m_z\varepsilon} \sin \theta \sin \varphi);$$

$$r = - \frac{c \sqrt{m_y m_z}}{e H_x} \omega_z, \quad \omega_z = \sqrt{\frac{2\varepsilon}{m_z}}, \quad \gamma = \frac{r}{l_z}, \quad l_z = \omega_z \tau, \quad (6)$$

$$\xi = \frac{z}{|r|}, \quad \alpha = \frac{d}{|r|}, \quad \sigma_0 = \frac{ne^2 \tau_0}{m_x}, \quad n_0 = \frac{8\pi}{3\hbar^3} \sqrt{m_x m_y m_z} (2\varepsilon_0)^{3/2}.$$

* Все величины зависят только от координаты z .

Периодическое по углам решение уравнения (5)

$$\psi(\xi; \pm \varphi, \theta) = \frac{\gamma \cos \theta}{\operatorname{sh} \pi \gamma} \left\{ e^{\pm \gamma(\pi - \varphi)} \int_0^{\infty} k(w + \cos \varphi) E(\xi - \operatorname{sign} H_x \cdot \sin \theta \cdot w) dw + \right. \\ \left. + e^{\mp \gamma \varphi} \int_0^{\infty} k(w - \cos \varphi) E(\xi + \operatorname{sign} H_x \cdot \sin \theta \cdot w) dw \right\}, \quad (7)$$

где

$$k(w) = s(1 - w) \frac{\operatorname{ch}(\gamma \arccos w)}{\sqrt{1 - w^2}}, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi, \quad (8)$$

а $s(t)$ — функция единичного скачка:

$$s(t) = 1 \quad (t > 0); \quad s(t) = 0 \quad (t < 0),$$

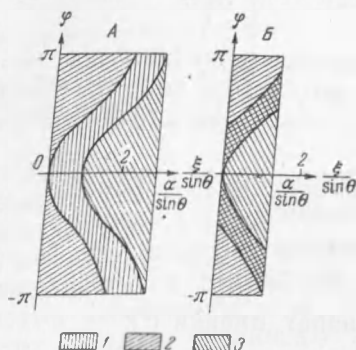


Рис. 1. А — $\alpha/\sin \theta > 2$; Б — $\alpha/\sin \theta < 2$ ($\alpha < 2$). 1 — область, где функция распределения такая же, как в неограниченном пространстве; 2 — область, где использовано граничное условие на поверхности $\xi = 0$; 3 — область, где использовано граничное условие на поверхности $\xi = \alpha$

дает добавку к функции распределения электронов в неограниченном пространстве. В пленке необходимо еще удовлетворить граничным условиям. Для этого заметим, что достаточно близко к поверхности пленки (на глубине, не превосходящей $2|r_0|$, куда проникают непосредственно отразившиеся от поверхности электроны) функция распределения еще не определена однозначно. На такой глубине в выражение (10) для $\psi(\xi; \pm \varphi, \theta)$ входят значения функции $E(\xi)$ не только внутри ($0 \leq \xi \leq \alpha$), но и вне ($-2 \leq \xi \leq 0, \alpha \leq \xi \leq \alpha + 2$) металла, где $E(\xi)$ не задана. Однозначно продолжая значения $E(\xi)$ на требуемую область через значения ее внутри металла (см. рис. 1), можно удовлетворить соотношениям (9).

При этом для всех ξ , $0 \leq \xi \leq \alpha$, определяется $\psi(\xi; \pm \varphi, \theta)^*$.

Отсюда получаем связь между плотностью тока j и напряженностью электрического поля E :

$$j_x(\xi) = \frac{3}{4\pi} \sigma_0 E \left\{ \int_0^{\alpha} K(|\xi - \mu|) d\mu + \int_0^{\alpha} r(\xi; \xi - \mu) d\mu + \int_0^{\alpha} r(\alpha - \xi; (\alpha - \xi) - \mu) d\mu \right\} \quad (9)$$

(при $0 \leq \mu \leq \alpha$, $E(\mu) = \text{const}$), где

$$K(w) = \frac{2|\gamma_0|}{\operatorname{sh} \pi |\gamma_0|} \int_0^{\pi} \cos^2 \theta d\theta \int_0^{\pi} \operatorname{ch} |\gamma_0| \varphi \cdot k\left(\frac{w}{\sin \theta} - \cos \varphi\right) d\varphi;$$

$$r(\xi; \mu) = \frac{2|\gamma_0|}{\operatorname{sh} \pi |\gamma_0|} \int_0^{\pi} \cos^2 \theta d\theta \int_0^{\pi} \operatorname{ch} \gamma_0 \varphi \cdot k\left[\frac{\mu}{\sin \theta} - \cos \varphi; \arccos\left(\frac{\xi}{\sin \theta} - \cos \varphi\right)\right] d\varphi; \quad (10)$$

$$\bar{k}(w; \varphi) = \frac{s(1 - \cos \varphi) \operatorname{sh}(|\gamma| \varphi - \beta) \operatorname{sh}(|\gamma|(\pi - \Phi) + \beta)}{\operatorname{sh}(|\gamma|(\pi - \varphi) + \beta) \operatorname{sh}(|\gamma|(\pi - \Phi) + \beta) - s(1 - \cos \Phi) \operatorname{sh}(|\gamma| \varphi - \beta) \operatorname{sh}(|\gamma|(\Phi - \beta))} \times \\ \times \left\{ k(-w) + s(1 - \cos \Phi) \frac{\operatorname{sh}(|\gamma|(\Phi - \beta))}{\operatorname{sh}(|\gamma|(\pi - \Phi) + \beta)} k(w) \right\}.$$

$$\Phi = \pi - \arccos\left(\cos \varphi - \frac{\alpha}{\sin \theta}\right); \quad \beta = -0,5 \ln q.$$

* Аналогичным методом можно получить функцию распределения в скрепленных электрическом и магнитном полях. При этом оказывается, что в работе (1) для $\alpha < 2$ функция распределения находится неверно.

В предельных случаях равного нулю постоянного магнитного поля ($\gamma_0 = \infty$) и толстой пленки ($d \rightarrow \infty$) формула (9) переходит в известные формулы.

В постоянных полях непосредственно из (9) определяется эффективная проводимость $\sigma = \int_0^d j dz / Ed$ при произвольном отражении электронов от поверхности металла (в известной нам литературе ^(1,3) рассматривалось только диффузное отражение).

Полученные выражения принципиально позволяют определить $\sigma(H)$ при произвольном значении q . Однако реальный физический смысл имеет, очевидно, только $q = 0$. Поэтому подробно рассматривается именно этот случай. Для сравнения приводятся результаты в противоположном предельном случае $q = 1$.

1. $q = 0$. Следует различать две возможности:

1) $\alpha_0 \gg 2$ — достаточно сильное магнитное поле. Электроны, отразившиеся от одной поверхности пленки, не могут непосредственно (без столкновений) достичь другой ее поверхности. Эффективная проводимость (для которой удается найти точное выражение)

$$\frac{\sigma}{\sigma_0} = 1 - \frac{3}{16\alpha_0 |\gamma_0|} \left\{ 2 - \frac{1}{1+4\gamma_0^2} (1 + e^{-2\pi |\gamma_0|}) \right\} \quad (11)$$

совпадает при $m_x = m_y = m_z = m$ с найденной иным способом для случая изотропных масс в ⁽³⁾.

Отсюда в случае сильного магнитного поля ($H/H_0 \gg 1$)

$$\frac{\sigma - \sigma_0}{\sigma_0} \approx \frac{3\pi H_0}{8kH}; \quad k = \frac{d}{l_{0z}}, \quad H_0 = \frac{c \sqrt{m_y m_z}}{|e| \tau_0} \quad (11a)$$

(H_0 — поле, при котором $r_0 = l_{0z}$), а в случае слабого магнитного поля ($H/H_0 \ll 1$) в толстой пленке ($k \gg 2\gamma_0 \gg 1$)

$$\frac{\sigma - \sigma_F}{\sigma_F} \approx \frac{3}{64k} \left(1 + \frac{3}{8k} \right) \left(\frac{H}{H_0} \right)^2; \quad \frac{\sigma_F}{\sigma_0} \approx 1 - \frac{3}{8k}. \quad (11b)$$

2) $\alpha_0 < 2$ — достаточно слабое магнитное поле. Электроны, отразившиеся от одной поверхности, могут без столкновений достичь другой. Выкладки при этом очень усложняются. Приведем результат вычислений только для слабого магнитного поля ($H/H_0 \ll 1$, $\gamma_0 \gg 1/k$):

$$\frac{\sigma - \sigma_F}{\sigma_F} \approx M \left(\frac{H}{H_0} \right)^2 \quad (12)$$

(σ_F — эффективная проводимость пленки при $H = 0$, см. ⁽²⁾), где коэффициент пропорциональности M зависит от толщины пленки:

$$M \approx \frac{3}{64k} \left\{ 1 + 8 \left[(1+k) + \frac{5}{6} k^2 (1-k) \right] e^{-k} + 16k^2 \left(1 - \frac{5}{16} k^2 \right) \text{Ei}(-k) \right\} \frac{\sigma_0}{\sigma_F}; \quad (13)$$

$$\frac{\sigma_F}{\sigma_0} = 1 - \frac{3}{8k} + \frac{3}{8k} \left(1 - \frac{5}{3} k - \frac{1}{6} k^2 + \frac{1}{6} k^3 \right) e^{-k} - \frac{3}{4} k \left(1 - \frac{1}{12} k^2 \right) \text{Ei}(-k).$$

В случае тонких пленок ($k \ll 1$) из (12) и (13)

$$\frac{\sigma - \sigma_F}{\sigma_F} = \frac{9}{16} \frac{1}{k^2 \ln \frac{1}{k}} \left(\frac{H}{H_0} \right)^2. \quad (12a)$$

В случае толстых пленок ($k \gg 1$)

$$\frac{\sigma - \sigma_F}{\sigma_F} \approx \frac{3}{64k} \left(1 + \frac{3}{8k}\right) \left(\frac{H}{H_0}\right)^2, \quad (126)$$

что совпадает с формулой (116). Формула (116) применима при $|\gamma_0| \leq \frac{1}{2} k$, а при $|\gamma_0| \geq \frac{1}{2} k \gg 1$ уже применима формула (126) (совпадающая с 116); следовательно, для толстых пленок ($k \gg 1$) формула (11) имеет место при любых магнитных полях.

2. $q = 1$. В достаточно сильном магнитном поле ($\alpha \geq 2$, $|\gamma_0| \ll 1$)

$$\frac{\sigma_0 - \sigma}{\sigma_0} \approx \frac{3A}{16k} \frac{H_0}{H}, \quad (14)$$

где A — константа порядка 1^* .

Отметим, что, как видно из найденных формул, анизотропия масс не меняет характера зависимости эффективной проводимости от магнитного поля и толщины пленки.

Семейство кривых зависимости эффективной проводимости от магнитного поля при диффузном отражении ($q = 0$) приведено на рис. 2 ($\lg \alpha_0 = \lg k + \lg (H/H_0)$). Из

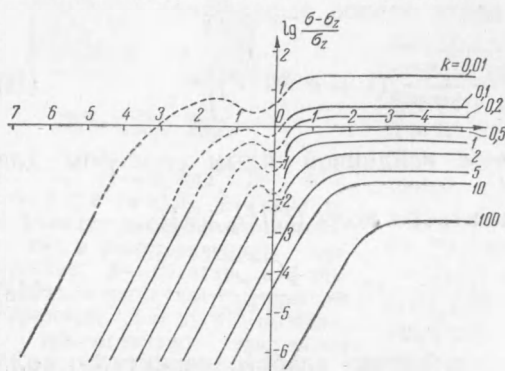


Рис. 2

графика видно, что в случае достаточно толстой пленки (достаточно большого k) кривая монотонна и не имеет перегибов. В случае же пленки, толщина которой порядка или меньше l_{0z} ($k \leq 1$), кривая имеет по крайней мере два перегиба и, следовательно, возможны экстремальные точки. С возрастанием магнитного поля, независимо от толщины пленки (и характера отражения электронов от поверхности металла), проводимость

стремится к проводимости массивного металла. При этом, однако, следует учитывать, что проведенное классическое рассмотрение законно в не слишком сильных магнитных полях, когда $h|\Omega_L| = h\tau \frac{H}{H_0} \ll kT$.

В заключение пользуюсь возможностью поблагодарить М. И. Каганова, И. М. Лифшица и Г. Я. Любарского за ценные дискуссии.

Харьковский государственный университет
им. А. М. Горького

Поступило
5 III 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ D. K. C. MacDonald, K. Sarginson, Proc. Roy. Soc., A, **203**, 223 (1950).
² K. Fuchs, Proc. Cambr. Phil. Soc., **34**, 400 (1938). ³ E. Koenigsberg, Phys. Rev., **91**, 138 (1953)

$$\begin{aligned} * A = 1 - \frac{6}{\pi} \int_0^\pi d\varphi \left\{ \int_0^{1-\cos\varphi} dx \int_{x-1}^{x-\cos\varphi} \frac{\arccos(x-y)}{\arccos(y-x)} \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} + \right. \\ \left. + \int_{1-\cos\varphi}^2 dx \int_{x-1}^1 \frac{\arccos(x-y)}{\arccos(y-x)} \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} \right\}. \end{aligned}$$