

А. Х. МИРЗАДЖАНЗАДЕ

ПОГРУЖЕНИЕ ТОНКОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ТРУБЫ В ВЯЗКО-ПЛАСТИЧНУЮ ЖИДКОСТЬ

(Представлено академиком А. И. Некрасовым 10 VII 1954)

В момент $t = 0$ в вязко-пластичную жидкость, заполнявшую все полупространство ниже некоторой горизонтальной плоскости $z = \text{const}$, начинает погружаться с постоянной скоростью V тонкая цилиндрическая труба, ось которой все время остается вертикальной. Аналогичная задача для вязкой жидкости решена С. М. Таргом ⁽¹⁾.

Расположим начало подвижной цилиндрической системы координат в центре нижнего основания трубы и направим ось Or по радиусу трубы, а ось Oz вертикально вверх.

Обозначим проекции абсолютной скорости жидкой частицы на оси Or и Oz через v_r и v_z , а относительной через v'_r и v'_z , тогда $v'_r = v_r$, $v'_z = v_z + V$. Ввиду симметрии $v_\phi = 0$.

Примем, что давление вдоль оси Oz постоянно и пренебрегаем массовыми силами.

Ввиду того, что скорость в направлении движения изменяется значительно медленнее, чем в направлении оси Or , и принимая $v_r \ll v_z$, пренебрегаем $v_r \partial v_z / \partial r$ и $v_z \partial v_z / \partial z$ по сравнению с $V \partial v_z / \partial z$; $\partial^2 v_z / \partial z^2$ — по сравнению с $\partial^2 v_z / \partial r^2 + (1/r)(\partial v_z / \partial r)$, а также $(\partial v_z / \partial z)^2$ и $(\partial v_r / \partial r)^2$ по сравнению с $(\partial v_z / \partial r)^2$.

При этом из основных дифференциальных уравнений вязко-пластичной жидкости ⁽²⁻⁴⁾ получим (ср. ⁽¹⁾)

$$V \frac{\partial v_z}{\partial z} = \frac{\eta}{\rho} \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) - \frac{\tau_0}{\rho r}. \quad (1)$$

Уравнение (1) в безразмерных переменных $x = r/R$, $y = z/R$, $U = v_z/V$, $\eta/V\rho R = a$, $\tau_0/\rho V^2 = b$ имеет вид:

$$\frac{\partial U}{\partial y} = a \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{1}{x} \frac{\partial U}{\partial x} \right) - \frac{b}{x}. \quad (2)$$

Введем вместо U новую функцию W , положив:

$$U = \frac{b}{a} x + W - 1 - \frac{b}{a};$$

тогда

$$\frac{\partial W}{\partial y} = a \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{1}{x} \frac{\partial W}{\partial x} \right), \quad (3)$$

где $b/a = \tau_0 R / \eta V$ — параметр Ильюшина.

Полученное уравнение представляет собой линейное однородное дифференциальное уравнение параболического типа.

Тонкая цилиндрическая труба при погружении в вязко-пластичную жидкость приведет в движение, главным образом, частицы жидкости,

ближайшие к трубе. Вследствие указанного будем считать, что впереди погружаемого основания трубы вязко-пластичная жидкость будет оставаться в покое. Примем, что частицы жидкости прилипают к стенкам трубы.

В этом случае граничные условия для внутренней области примут вид:

$$\begin{aligned} W(1, y) &= 0 & (y > 0); \\ W(x, y) &= -\frac{b}{a}x + 1 + \frac{b}{a} & (y \leq 0); \\ W(x, y) &\neq 0 & (0 \leq x < 1; y > 0). \end{aligned}$$

Решая уравнение (3) методом разделения переменных и используя последнее граничное условие, получим:

$$W = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\alpha_n^2 a y} J_0(\alpha_n x).$$

Используя первое граничное условие, получим характеристическое уравнение для определения корней бесселевой функции α_n :

$$J_0(\alpha_n) = 0.$$

Для определения C_n воспользуемся вторым граничным условием:

$$-\frac{b}{a}x + 1 + \frac{b}{a} = \sum_{n=1}^{\infty} C_n J_0(\alpha_n x),$$

т. е. C_n являются коэффициентами функции $-\frac{b}{a}x + 1 + \frac{b}{a}$ при разложении ее в ряд Фурье — Бесселя на интервале $(0, 1)$. Следовательно:

$$C_n = \frac{2}{J_1^2(\alpha_n)} \int_0^1 x \left(-\frac{b}{a}x + 1 + \frac{b}{a} \right) J_0(\alpha_n x) dx.$$

Таким образом, закон распределения скоростей во внутренней области будет иметь вид

$$U = \frac{b}{a}(x-1) + \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\alpha_n^2 a y} J_0(\alpha_n x) - 1. \quad (4)$$

При погружении тонкой цилиндрической трубы в вязко-пластичную область создается зона возмущения. Принимая, что зона возмущения имеет вид круговой цилиндрической поверхности, размер определим из следующего выражения (при условии $\frac{(\gamma_2 - \gamma_1)H}{\gamma_2(L-H)} \gg 1$):

$$r_0 = \frac{(\gamma_1 - \gamma_2)F}{2\pi\tau_0},$$

где γ_1 — объемный вес цилиндрической трубы; γ_2 — объемный вес вязко-пластичной жидкости; F — площадь основания цилиндрической трубы; L — высота трубы.

Для внешней области в уравнение (2) вместо U введем новую переменную W' , положив:

$$U = W' - \frac{x - x_0}{1 - x_0},$$

где $x_0 = r_0/R$.

В этом случае уравнение (2) примет вид:

$$\frac{\partial W'}{\partial y} = a \left(\frac{\partial^2 W'}{\partial x^2} + \frac{1}{x} \frac{\partial W'}{\partial x} \right) - \frac{b + \frac{a}{1-x_0}}{x}. \quad (5)$$

Граничные условия для внешней области будут иметь вид:

$$\begin{aligned} W'(1, y) &= 0 & (y > 0); \\ W'(x, y) &= \frac{x-x_0}{1-x_0} & (y \leq 0); \\ W''(x, y) &= 0 & (x \geq x_0). \end{aligned}$$

Будем искать решение уравнения (5) в виде разложения в ряд по функциям $J_0(\beta_n x) Y_0(\beta_n) - J_0(\beta_n) Y_0(\beta_n x)$:

$$W' = \sum_{n=1}^{\infty} W_n(y) [J_0(\beta_n x) Y_0(\beta_n) - J_0(\beta_n) Y_0(\beta_n x)]. \quad (6)$$

Используя третье граничное условие, получим характеристическое уравнение для определения β_n :

$$J_0(\beta_n x_0) Y_0(\beta_n) - J_0(\beta_n) Y_0(\beta_n x_0) = 0.$$

Так как разложение по собственным функциям сходится при тех же условиях, что и разложение в ряд Фурье по косинусам, и функция

$\frac{b + \frac{a}{1-x_0}}{x}$ удовлетворяет условиям Дирихле на интервале $(1, x_0)$, то разложим ее в ряд по функциям $J_0(\beta_n x) Y_0(\beta_n) - J_0(\beta_n) Y_0(\beta_n x)$:

$$\frac{b + \frac{a}{1-x_0}}{x} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n [Y_0(\beta_n) J_0(\beta_n x) - J_0(\beta_n) Y_0(\beta_n x)]; \quad (7)$$

$$a_n = \frac{b + \frac{a}{1-x_0}}{H_n} \int_1^{x_0} [Y_0(\beta_n) J_0(\beta_n x) - J_0(\beta_n) Y_0(\beta_n x)] dx;$$

$$H_n = \int_1^{x_0} x [J_0(\beta_n x) Y_0(\beta_n) - J_0(\beta_n) Y_0(\beta_n x)]^2 dx.$$

Подставив (6) и $\frac{b + \frac{a}{1-x_0}}{x}$ из (7) в (5), будем иметь:

$$\sum_{n=1}^{\infty} [J_0(\beta_n x) Y_0(\beta_n) - J_0(\beta_n) Y_0(\beta_n x)] \left[-a\beta_n^2 W_n(y) - \frac{dW_n(y)}{dy} - a_n \right] = 0. \quad (8)$$

Уравнение (8) будет удовлетворено, если все коэффициенты разложения равны нулю:

$$\frac{d}{dy} W(y) + a\beta_n^2 W_n(y) + a_n = 0. \quad (9)$$

Решая обыкновенное дифференциальное уравнение (9) методом вариации постоянных, получим:

$$W_n'(y) = C_n e^{-a\beta_n^2 y} - \frac{a_n}{a\beta_n^2}. \quad (10)$$

Требуя выполнения второго граничного условия, получаем:

$$W'(x, 0) = \frac{x-x_0}{1-x_0} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(C_n - \frac{a_n}{a\beta_n^2} \right) [Y_0(\beta_n) J_0(\beta_n x) - J_0(\beta_n) Y_0(\beta_n x)],$$

т. е. $C_n - \frac{a_n}{a\beta_n^2}$ являются коэффициентами разложения функции $\frac{x-x_0}{1-x_0}$.

удовлетворяющей условиям Дирихле, в ряд по функциям $Y_0(\beta_n)J_0(\beta_n x) - J_0(\beta_n)Y_0(\beta_n x)$ на интервале $(1, x_0)$. Следовательно,

$$C'_n = \frac{a_n}{a\beta_n^2} + \frac{1}{H'_n} \int_1^{x_0} x \frac{x-x_0}{1-x_0} [Y_0(\beta_n)J_0(\beta_n x) - J_0(\beta_n)Y_0(\beta_n x)] dx;$$

$$H'_n = \int_1^{x_0} x [Y_0(\beta_n)J_0(\beta_n x) - J_0(\beta_n)Y_0(\beta_n x)]^2 dx.$$

Таким образом, распределение скоростей по внешней области будет:

$$U = \sum_{n=1}^{\infty} \left(C'_n e^{-\alpha \beta_n^2 y} - \frac{a_n}{a\beta_n^2} \right) [Y_0(\beta_n)J_0(\beta_n x) - J_0(\beta_n)Y_0(\beta_n x)] - \frac{x-x_0}{1-x_0}. \quad (11)$$

Подсчитаем напряжение силы трения на внутренней поверхности трубы:

$$\tau_1 = -\frac{V\eta}{R} \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)_{x=1} + \tau_0 = -\frac{V\eta}{R} \left[\frac{b}{a} - \sum_{n=1}^{\infty} C'_n e^{-\alpha \beta_n^2 y} \alpha_n J_1(\alpha_n) \right] + \tau_0. \quad (12)$$

Подсчитаем напряжение силы трения на внешней поверхности:

$$\begin{aligned} \tau_2 &= \frac{V\eta}{R} \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)_{x=1} + \tau_0 = \\ &= \frac{V\eta}{R} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \left(C'_n e^{-\alpha \beta_n^2 y} - \frac{a_n}{a\beta_n^2} \right) \beta_n [J'_0(\beta_n)Y_0(\beta_n) - J_0(\beta_n)Y'_n(\beta_n)] - \frac{1}{1-x_0} \right\} + \tau_0. \end{aligned} \quad (13)$$

Как известно, $J'_0(\beta_n)Y_0(\beta_n) - J_0(\beta_n)Y'_n(\beta_n) = 2/\pi\beta_n$. Таким образом,

$$\tau_2 = -\frac{2V\eta}{\pi R} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \left(C'_n e^{-\alpha \beta_n^2 y} - \frac{a_n}{a\beta_n^2} \right) - \frac{1}{1-x_0} \right] + \tau_0. \quad (13')$$

Полная сила трения на внутренней поверхности определится из выражения

$$\begin{aligned} F_1 &= 2\pi R^2 \int_0^{H/R} \tau_1 dy = \\ &= 2\pi\eta VR \left[-\frac{b}{a} \frac{H}{R} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_n J_1(\alpha_n)}{\alpha_n a} (1 - e^{-\alpha_n^2 a H/R}) \right] + 2\pi RH\tau_0, \end{aligned} \quad (14)$$

где H — глубина погружения трубы. Полная сила трения на внешней поверхности определится из выражения

$$\begin{aligned} F_2 &= 2\pi R^2 \int_0^{H/R} \tau_2 dy = \\ &= 4RV\eta \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \left[-\frac{1}{a\beta_n^2} (1 - e^{-\alpha \beta_n^2 H/R}) \right] - \frac{1}{1-x_0} \frac{H}{R} \right\} + 2\pi RH\tau_0. \end{aligned} \quad (15)$$

Полное сопротивление погружению трубы равно сумме F_1 и F_2 .

Поступило
4 V 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ С. М. Тарг, Основные задачи теории ламинарных течений, М.—Л., 1951.
- ² А. А. Ильющин, Тр. конференции по пластическим деформациям, 1936.
- ³ А. М. Гуткин, Трение и износ в машинах, 1, изд. АН СССР, М.—Л., 1947.
- ⁴ А. Х. Мирзаджанзаде, А. Ф. Касимов, Докл. АН Азерб.ССР, 8, № 10 (1952).