

Б. С. СОДНОВ

ПРИМЕР ДВУХ МНОЖЕСТВ ТИПА G_δ , АРИФМЕТИЧЕСКАЯ СУММА* КОТОРЫХ НЕИЗМЕРИМА B

(Представлено академиком П. С. Александровым 29 IX 1954)

Известно, что арифметическая сумма двух B -множеств может быть A -множеством, неизмеримым B ⁽²⁾. Этот факт был установлен косвенным путем. В настоящей статье мы даем некоторый регулярный процесс построения двух множеств типа G_δ , арифметическая сумма которых есть A -множество, неизмеримое B .

Известно, что всякое A -множество может быть получено при помощи элементарного решета. Необходимым и достаточным условием его измеримости B является ограниченность индексов решета ⁽¹⁾.

В дальнейшем мы будем рассматривать прямоугольники, ориентированные по осям координат. Пусть Δ — такой прямоугольник и $\text{пр}_x \Delta = [x_1, x_2]$, $\text{пр}_y \Delta = [y_1, y_2]$.

Множества h , v , D и D^* точек плоскости, координаты которых удовлетворяют, соответственно, неравенствам

$$\begin{aligned} y_1 < y < y_2, \\ x_1 < x < x_2, \\ x_1 + y_1 < x + y < x_2 + y_2, \\ x_1 - y_2 < x - y < x_2 - y_1, \end{aligned}$$

будем называть для краткости, соответственно, h -, v -, D - и D^* -полосами прямоугольника Δ .

Определение. Систему n прямоугольников

$$\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$$

назовем системой независимых прямоугольников, если $(h_i \cdot h_j) \cdot D_k = 0$ для всяких i, j, k , $i \neq j$.

Из определения следует, что проекции прямоугольников такой системы на каждую из осей координат попарно не пересекаются. Множество точек плоскости упорядочим следующим образом: $(x_1, y_1) < (x_2, y_2)$ при $y_1 < y_2$. Если же $y_1 = y_2$, то $(x_1, y_1) < (x_2, y_2)$ при $x_1 > x_2$.

Обозначим через Σ множество таких прямоугольников, что проекции на любую из осей координат всяких двух из них не пересекаются или одна вложена в другую. Это множество прямоугольников становится упорядоченным, если отношение $<$ между его прямоугольниками установить согласно порядку их левых верхних вершин.

Фигуру, состоящую из левой боковой и верхней сторон какого-нибудь прямоугольника, назовем крышкой этого прямоугольника.

* Арифметической суммой двух множеств E_1 и E_2 называется множество всех $x + y$, где $x \in E_1$ и $y \in E_2$.

Лемма. Каковы бы ни были прямоугольник K и натуральное число n , можно построить в K систему из $2n$ независимых прямоугольников: $\Delta_1 < \Delta'_1$, $\Delta_2 < \Delta'_2$, ..., $\Delta_n < \Delta'_n$ так, чтобы $D_i = D'_i$, $i = 1, 2, \dots, n$, и $D_i \cdot D_j = 0$, $i \neq j$.

Достаточно показать, что такая система существует на плоскости. Пусть $n = 1$. Разделим единичный квадрат на 9 равных квадратов и возьмем два угловых квадрата с общей D -полосой. Если $n = 2$, то сделаем такое построение в двух угловых квадратах с общей D^* -полосой.

Предположим, что лемма верна для $n - 1$. Пусть $\Delta_1 < \Delta'_1$, $\Delta_2 < \Delta'_2$, ..., $\Delta_{n-1} < \Delta'_{n-1}$ — прямоугольники, удовлетворяющие лемме для $n - 1$. Тогда, применив лемму для $n = 2$ к прямоугольнику Δ_{n-1} , убедимся, что лемма верна и для n .

Возьмем некоторый квадрат Δ . В Δ построим систему S_1 из двух независимых квадратов $\Delta_1 < \Delta'_1$ с общей D -полосой. Пусть D_1 — эта полоса.

Предположим, что построены полосы $D_{i_1, i_2, \dots, i_k}$, $i_r = 1, 2, \dots, r$, $k = 1, 2, \dots, n$, попарно непересекающиеся при любом фиксированном ранге k , и система квадратов Δ , имеющих эти полосы своими D -полосами, причем $D_{i_1, i_2, \dots, i_k} \subset D_{i_1, i_2, \dots, i_k, i_{k+1}}$, каковы бы ни были $i_1, i_2, \dots, i_{k+1}$ и k . Каждому квадрату Δ припишем кортеж индексов так, чтобы, если какой-нибудь квадрат вложен в другой, то кортеж индексов первого есть продолжение кортежа индексов последнего. Относительно полос $D_{i_1, i_2, \dots, i_n}$ и квадратов Δ предположим следующее:

1. Каждая полоса $D_{i_1, i_2, \dots, i_n}$ пересекает ровно n квадратов Δ , один из которых имеет ее своей D -полосой, тогда как D -полосы остальных содержат ее внутри себя; пусть $\zeta_1 < \zeta_2 < \dots < \zeta_n$ * эти квадраты, а ζ_s имеет $D_{i_1, i_2, \dots, i_n}$ своей D -полосой.

2. В каждой $D_{i_1, i_2, \dots, i_n}$ можно построить еще n квадратов $\zeta'_1, \zeta'_2, \dots, \zeta'_n$, конгруэнтных с ζ_s и расположенных следующим образом: $\zeta'_1 < \zeta'_2 < \dots < \zeta'_{s-1} < \zeta_{s-1} < \zeta_s < \zeta'_s < \dots < \zeta'_n < \zeta_n$, причем каждый ζ'_i содержится внутри того квадрата, которому он предшествует, и совокупность S_n квадратов ζ' и квадратов Δ , имеющих $D_{i_1, i_2, \dots, i_n}$ своими D -полосами, образует систему независимых квадратов.

В ζ_s существует система из $2(n + 1)$ независимых квадратов. Пусть $\delta_1 < \delta'_1$, $\delta_2 < \delta'_2$, ..., $\delta_n < \delta'_n$, $\delta_{n+1} < \delta'_{n+1}$ эти квадраты, а $D_{i_1, i_2, \dots, i_n}$ — общая D -полоса квадратов δ_r и δ'_r ($r = 1, 2, \dots, n + 1$). В полосе $D_{i_1, \dots, i_n}$, $r \neq s$, построим квадрат, расположенный в ζ'_r , если $r < s$, и в ζ'_{r-1} , если $r > s$, подобно квадрату δ_r в ζ_s . В полосе $D_{i_1, i_2, \dots, i_n}$ берем квадрат δ_s . Это значит, что в полосе $D_{i_1, i_2, \dots, i_n}$ строим квадрат, расположенный между (в смысле отношения $<$) квадратами ζ'_{r-1} и ζ'_r . Все вновь построенные квадраты обозначим буквой Δ , приписав им кортежи индексов, естественным образом продолжая кортежи индексов построенных до них квадратов. Квадрат Δ , не вложенный ни в какой из ранее построенных квадратов, получает индекс ранга 1. Пусть $D_{i_1, i_2, \dots, i_{n+1}}$, $i_{n+1} = 1, 2, \dots, n + 1$, суть D -полосы так построенных квадратов. Эти полосы и квадраты Δ удовлетворяют всем условиям индуктивного предположения.

Таким образом, определен регулярный процесс построения квадратов Δ , на каждом этапе которого строится лишь конечное число квадратов. При этом, если на каком-то этапе этого процесса строится

* ζ'_i — временные обозначения квадратов $\Delta_{i_1, i_2, \dots, i_k}$.

в D -полосе некоторого квадрата новый квадрат, непосредственно предшествующий первому, то он содержится в нем. Отсюда следует, что всякая совокупность квадратов одного и того же ранга n , содержащихся в одном и том же квадрате $(n-1)$ -го ранга и пересечение D -полос которых не пусто, вполне упорядочена отношением $<$, так как она имеет квадрат, предшествующий всем. Таким квадратом будет квадрат, построенный раньше остальных.

Пусть $\{\Delta_{n_1 n_2 \dots n_k}\}$, $n_k = 1, 2, \dots$; $k = 1, 2, \dots$, — система так построенных квадратов, а $\{D_{i_1 i_2 \dots i_n}\}$, $i_n = 1, 2, \dots, n$; $n = 1, 2, \dots$, — система их D -полос. Заметим, что индексы квадратов Δ и их D -полос вообще не совпадают. Положим: $E = \prod_k \sum_{(n_1 \dots n_k)} \Delta_{n_1 n_2 \dots n_k}$ и $P = \prod_n \sum_{(i_1 \dots i_n)} g_{i_1 i_2 \dots i_n}$, где $g_{i_1 i_2 \dots i_n}$ — пересечение $D_{i_1 i_2 \dots i_n}$ с осью Ox .

E есть плоское множество типа G_δ ; P — совершенное множество. Так как проекции квадратов Δ одного и того же ранга на оси координат попарно не пересекаются, то E равномерно по направлению каждой из осей координат. Проекции E_x и E_y множества E , соответственно, на ось Ox и на ось Oy суть множества типа G_δ .

Докажем, что арифметическая сумма $E_x \oplus E_y$ множеств E_x и E_y есть A -множество, неизмеримое B .

$$E_x \oplus E_y = (E_x \times E_y)_l = [(E_x \times E_y) - E]_l + E_l^*.$$

Рассмотрим пересечение $E_x \oplus E_y$ с совершенным множеством P . $[(E_x \times E_y) - E]_l \cdot P = 0$. Допустим, что некоторая точка x' принадлежит этому множеству. Тогда $x' = \prod_m g_{i'_1 \dots i'_m}$ и на прямой $l_{x'}$ ** найдется

точка (x_0, y_0) множества $(E_x \times E_y) - E$. Следовательно, существуют точки (x_0, y_1) и (x_1, y_0) , отличные от (x_0, y_0) и принадлежащие E . Возьмем N столь большим, чтобы D -полосы ранга N , содержащие точки (x_0, y_1) и (x_1, y_0) , не пересекались с $D_{i'_1 i'_2 \dots i'_N}$, содержащей (x_0, y_0) . Пусть квадраты ζ_1 и ζ_2 системы S_N содержат, соответственно, точки (x_0, y_1) и (x_1, y_0) , а квадрат ζ_3 имеет $D_{i'_1 i'_2 \dots i'_N}$ своей D -полосой.

Тогда пересечение v -полосы ζ_1 , h -полосы ζ_2 и D -полосы ζ_3 не пусто, что противоречит тому, что S_N есть система независимых прямоугольников. Так как $P \supset E_l$, то $P \cdot E_l = E_l$. Покажем, что E_l не B -множество. Рассмотрим B -решето C , счетноформное по направлению прямых l_x и состоящее из покрывающих квадратов Δ . Предположим, что положительное направление на прямых l_x выбрано так, чтобы на них отношение $<$ совпадало с отношением $<$. Докажем, что какой бы тип γ счетного множества ни взяли, найдется прямая l_x , пересекающая C по множеству заданного типа γ . Пусть дано счетное множество R данного типа γ и $z_1, z_2, \dots, z_n, \dots$ — некоторый пересчет всех точек множества R . Точка z_2 расположена относительно точки z_1 одним из двух возможных способов. В полосе D_1 имеются две полосы D_{11} и D_{12} , в которых осуществлены два возможных расположения (в смысле отношения $<$) второго квадрата относительно Δ_1 . Выберем ту, в которой второй квадрат расположен подобно точке z_2 относительно z_1 . Пусть D_{11} — эта полоса. Предположим, что уже выбрана полоса $D_{11} \dots i_n$, пересекающая n квадратов, расположенных подобно

* Через E_l обозначаем проекцию на ось Ox множества E вдоль прямых $y + x = \text{const}$.

** Через l_x обозначаем прямые $y + x = \text{const}$.

точкам $z_1, z_2, \dots, z_n$. Точка z_{n+1} расположена одним из $n+1$ возможных способов относительно точек $z_1, z_2, \dots, z_n$. Пусть $z_{r-1} < z_{n+1} < z_r$. Тогда берем полосу $D_{i_1, \dots, i_n}$. Так продолжая дальше, получаем последовательность полос $D_1 \supset D_{i_1} \supset \dots \supset D_{i_1, \dots, i_n} \supset \dots$, пересечение l_x , которых есть искомая прямая. Действительно, точки пересечения l_x с решетом C суть точки ее пересечения с покрывками квадратов, расположенных в этих полосах, так как других квадратов она пересекать не может. Но эти квадраты расположены по типу γ , а следовательно, и точки пересечения l_x с их покрывками расположены также по типу γ .

A -множество, определенное решетом C , неизмеримо B ⁽¹⁾. Видно, что E_l есть это множество. Таким образом имеем $(E_x \oplus E_y) \cdot P = E_l$. Значит, $E_x \oplus E_y$ есть A -множество, неизмеримое B .

Из этой конструкции двух множеств E_x и E_y типа G_δ , арифметическая сумма которых не B -множество, вытекает, что арифметическая сумма одного из этих множеств с замыканием другого есть также не B -множество. Следовательно, арифметическая сумма множества типа G_δ и замкнутого множества может быть A -множеством, неизмеримым B .

Дальнейшее понижение класса B -множеств, могущих иметь неизмеримую B арифметическую сумму, невозможно, так как арифметическая сумма двух множеств типа F_σ есть множество также типа F_σ .

На вопрос, нельзя ли получить всякое A -множество арифметическим сложением двух B -множеств, ответ отрицателен. Можно построить совершенное множество, не содержащее никаких конгруэнтных подмножеств, содержащих более одной точки. Никакое A -множество, неизмеримое B и содержащееся в нем, не может быть арифметической суммой двух B -множеств.

Поступило
4 XII 1952

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Усп. матем. наук, 5, в. 5, Цикл статей по дескриптивной теории множеств.
² Б. С. Содномов, ДАН, 80, № 2 (1951).