

А. Г. ПИНСКЕР

СТРУКТУРЫ, ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ K -ПРОСТРАНСТВАМ

(Представлено академиком В. И. Смирновым 22 IX 1954)

K -пространством, как известно ⁽¹⁾, называется линейное множество X , в котором выделен класс положительных элементов $x > 0$ так, что выполняются следующие пять аксиом Л. В. Канторовича:

I. $x > 0$ исключает $x = 0$.

II. Если $x > 0$ и $y > 0$, то $x + y > 0$.

III. Для всякого $x \in X$ существует такой элемент $y \geq 0$, что $y - x \geq 0$.

IV. Если $x > 0$ и $\lambda > 0$ (λ — вещественное число), то $\lambda x > 0$.

V. Для всякого ограниченного сверху множества $E \subset X$ существует его верхняя грань $\sup E$.

При этом отношение $x \geq y$ равносильно $x - y \geq 0$.

Частично упорядоченное множество S эквивалентно K -пространству X , если S и X изоморфны как частично упорядоченные множества (структурно изоморфны). В этом случае в S можно так определить алгебраические операции, что S окажется K -пространством, изоморфным X . Естественно возникает следующий вопрос: указать (в терминах теории структур) условия необходимые и достаточные для того, чтобы частично упорядоченное множество было изоморфно K -пространству. Решение этой проблемы и составляет содержание настоящей заметки.

Нам понадобятся некоторые новые понятия.

Пусть S — дистрибутивная структура, содержащая элемент 0, обладающий свойствами:

1. Множества $S^+ = \{x: x \geq 0, x \in S\}$ и $S^- = \{x: x \leq 0, x \in S\}$ двойственно изоморфны (или антиизоморфны).

Если $x \leftrightarrow x^*$ ($x \in S^+$, $x^* \in S^-$), то условимся писать $x = -x^*$ и $x^* = -x$. Если $x \in S$, то положим $x_+ = x \vee 0$ и $x_- = -(x \wedge 0)$; очевидно, $x_+ \geq 0$ и $x_- \geq 0$.

2. Для всякого элемента $x \in S$ существует такой элемент $x' \in S$, что $x'_- = x_-$ и $x'_+ = x_+$. Будем в этом случае писать $x' = -x$. Легко видеть, что $-(-x) = x$; $x \leq y$ влечет за собой $-x \geq -y$; $x \leq y$ равносильно $x_+ \leq y_+$ и $x_- \geq y_-$; $x \wedge y = -(-x \vee -y)$.

3. Для всякого $x \in S$ $x_+ \wedge x_- = 0$.

Если положить $|x| = x \vee -x$, то $|x| \geq 0$ и $|x| = x_+ \vee x_-$.

4. Каковы бы ни были элементы x' и x'' , $x' \wedge x'' = 0$, существует такой элемент $x \in S$, что $x_+ = x'$ и $x_- = x''$.

Структуру S , обладающую указанными выше свойствами, будем называть симметричной. В такой структуре, только в структурных терминах, определено «умножение на -1 » с обычными свойствами.

Теорема 1. Если P — произвольная дистрибутивная структура с наименьшим элементом 0, то существует такая симметричная структура S , определяемая однозначно с точностью до изо-

морфизма, что S^+ изоморфно P . Если при этом P — полная и неограниченно дистрибутивная структура, то и S — полная неограниченно дистрибутивная структура.

Элементы x и y симметричной структуры S называются дизъюнктивными, если $|x| \wedge |y| = 0$. Пусть $E \subset S$; совокупность всех элементов S , дизъюнктивных всем элементам E (дизъюнктивное дополнение E), будем называть компонентой S .

Теорема 2. Множество всех компонент структуры S представляет собой полную булеву алгебру по включению.

Множество $\{X_\alpha\}$ компонент S — фундаментальное, если X_α попарно дизъюнктивны и их объединение совпадает с S . Полную неограниченно дистрибутивную симметричную структуру S назовем разложимой, если всякий элемент $x \geq 0$ ($x \in S$) допускает представление

$$x = \sup \{x_\alpha\} \quad (x_\alpha \in X_\alpha).$$

Такое представление единственно и x_α есть «проекция» x в компоненту X_α ,

$$x_\alpha = \sup_{0 \leq x' \leq x, x' \in X_\alpha} \{x'\} = \text{Pr}_{X_\alpha} x.$$

Укажем некоторые критерии «разложимости» структуры S .

Теорема 3. Для того чтобы полная неограниченно дистрибутивная симметричная структура S была разложимой, необходимо и достаточно выполнение одного из нижеследующих условий:

а) Если $x' \wedge x'' = 0$, $x' \vee x'' = x$ и $x < y$, то существуют такие элементы y' и y'' , что $y' \wedge y'' = 0$, $y' \vee y'' = y$ и $x' \leq y'$, $x'' \leq y''$;

б) если $x \geq 0$ и X — компонента S , то для элемента $x' = \text{Pr}_X x$ найдется элемент x'' , удовлетворяющий условиям: $x' \wedge x'' = 0$ и $x' \vee x'' = x$.

Элемент 1 разложимой структуры S называется ее «единицей», если для всякого $x > 0$ $x \wedge 1 > 0$.

Теорема 4. Всякая разложимая структура S разлагается в «сумму» своих компонент с единицами.

Тем самым изучение произвольной разложимой структуры сводится к изучению разложимых структур с единицей.

Пусть S — разложимая структура с единицей. Множество $E \subset S$ называем отделяющим, если, каковы бы ни были элементы $x, y \in S$, $x \neq y$, найдется такая компонента $X \subset S$ и такой элемент $z \in E$, что выполняется одно из следующих соотношений:

$$\text{Pr}_X x < \text{Pr}_X z < \text{Pr}_X y \quad \text{или} \quad \text{Pr}_X x > \text{Pr}_X z > \text{Pr}_X y.$$

Теперь мы можем сформулировать основную теорему о характеристике K -пространств с единицей.

Теорема 5. Для того чтобы структура S была эквивалентна K -пространству с единицей, необходимо и достаточно, чтобы она была разложимой, с единицей, содержала отделяющее множество $E = \{1_\lambda\}$ (λ — любое вещественное число), изоморфное множеству всех вещественных чисел упорядоченных по возрастанию, причем элементы 1_λ удовлетворяют условиям:

а) $1_{-\lambda} = -1_\lambda$;

б) при $\lambda > 0$ 1_λ — единица S ; при $\lambda = 0$ $1_\lambda = 0$;

в) проекции элементов 1_λ во всякую ненулевую компоненту S строго возрастают с увеличением λ и образуют неограниченное (сверху и снизу) множество;

г) если $\{X_n\}$ — фундаментальная система компонент S и множество $\{Pg_{X_n} 1_{\lambda_n}\}$ ограничено в S , то и множество $\{Pg_{X_n} 1_{2\lambda_n}\}$ также ограничено в S .

Теорема 5 позволяет без труда охарактеризовать (в терминах теории структур) произвольное K -пространство, различные частные его виды (например расширенное, ограниченных элементов и т. д.), а также и полуупорядоченные группы (полные структурно упорядоченные группы). Тем самым теория полуупорядоченных групп и пространств в известном смысле включается в общую теорию структур.

Всесоюзная
высшая финансовая школа

Поступило
10 VII 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ Л. В. Канторович, Б. З. Вулих, А. Г. Пинскер, Функциональный анализ в полуупорядоченных пространствах, М. — Л., 1950.