

Член-корреспондент АН СССР В. Л. ГИНЗБУРГ

## ОБ ОПТИЧЕСКИХ СВОЙСТВАХ МЕТАЛЛОВ

Несмотря на то, что оптические свойства металлов изучаются уже очень давно, в этой области нет еще достаточной ясности ни в экспериментальном, ни в теоретическом отношении. Объясняется это, во-первых, весьма распространенным непониманием задач металлооптики с точки зрения получения сведений, особенно ценных для электронной теории металлов. Поэтому обычно ограничиваются измерением коэффициента отражения от металлической поверхности при нормальном падении  $r = 1 - A$ , в то время как можно и нужно определять две характеризующие металл величины  $n_{эф}$  и  $\kappa_{эф}$  (см. ниже) \*. В результате этого данные о  $n_{эф}$  и  $\kappa_{эф}$  для типичных металлов имеются (в нужной области частот) лишь для Ag, Au и Cu и при этом получены (4) в 1913 г. и, несомненно, нуждаются по ряду причин в уточнении. Затруднения, встречавшиеся при обработке уже имеющихся данных, связаны, во-вторых, с учетом аномального характера скин-эффекта в металлах. Этот момент недавно проанализирован в (5), но и в (5) при сравнении теории с опытом электроны проводимости считаются совершенно свободными (эффективная масса  $m_{эф} = m = 9,1 \cdot 10^{-28}$ ), причем их концентрация  $N$  определяется не из экспериментальных данных, а принимается, например, равной концентрации атомов  $N_a$ . Между тем, основная ценность оптических исследований металлов связана как раз с возможностью определить концентрацию  $N$  на опыте. Осветить с учетом сделанных замечаний задачи и возможности металлооптики и является нашей целью.

Если при рассмотрении распространения света в металле можно пользоваться комплексной диэлектрической постоянной

$$\varepsilon' \equiv \varepsilon - i \frac{4\pi\sigma}{\omega} \equiv (n - i\kappa)^2, \quad (1)$$

то имеют место известные формулы (1)

$$A = 1 - r = \frac{4n}{n^2 + \kappa^2 + 1 + 2n}, \quad \sin \varphi_0 \operatorname{tg} \varphi_0 = \sqrt{n^2 + \kappa^2}, \quad \operatorname{tg} 2\Psi_0 = \frac{\kappa}{n}, \quad (2)$$

где все величины зависят от частоты  $\omega$ .

Первая из формул (2) точная; две следующие справедливы при пренебрежении членами  $\sim \sin^2 \varphi / \varepsilon'$ , где  $\varphi$  — угол падения, по сравнению с единицей, т. е., практически, при наблюдающемся обычно условии

$$|\varepsilon'| \gg \sin^2 \varphi. \quad (3)$$

Если длина свободного пробега электронов в металле  $l_0$  сравнима или больше глубины скин-слоя  $\delta$ , то скин-эффект является аномальным (5-9) и при вычислении поля и потерь в металле нельзя использовать

\* Для определения  $n_{эф}$  и  $\kappa_{эф}$  обычно измеряют  $\varphi_0$  и  $\Psi_0$  или  $\varphi_0$  и  $A$ , где  $\varphi_0$  и  $\Psi_0$  — главный угол падения и главный азимут (см., например, (1)). Вместо  $\varphi_0$ ,  $\Psi_0$  и  $A$  можно измерять и другие величины, зависящие от  $n_{эф}$  и  $\kappa_{эф}$  (см., например, (2, 3)).

понятие об  $\varepsilon'(\omega)$ . Однако отражение света \* от металла при условии (3) для вводимой ниже величины  $\varepsilon'_{\text{эф}}$  определяется одной комплексной величиной — поверхностным импедансом  $Z$ , независимо от возможности использовать величину  $\varepsilon'$  в металле (это ясно, например, из (10)):

$$Z = R + iX = \frac{4\pi}{c} \left( \frac{E_x}{H_y} \right)_0 = -\frac{4\pi}{c} \left( \frac{E_y}{H_x} \right)_0 = \frac{4\pi}{c \sqrt{\varepsilon'_{\text{эф}}}}, \quad (4)$$

где компоненты полей  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  берутся на поверхности металла и  $\varepsilon' \equiv \varepsilon_{\text{эф}} - i \frac{4\pi\sigma_{\text{эф}}}{\omega} \equiv (n_{\text{эф}} - i\kappa_{\text{эф}})^2$  — величина, определяемая уравнением (4), т. е. равная  $\varepsilon'_{\text{эф}} = c^2/16\pi^2 Z^2$ . Если введение  $\varepsilon'$  в металле возможно, то  $\varepsilon'_{\text{эф}} = \varepsilon'$ , и ясно, что отражение света от металла всегда (но при условии (3)) происходит так же как от среды с  $\varepsilon' = \varepsilon'_{\text{эф}}$ . Поэтому выражения (2) остаются в силе, но с заменой  $n$  и  $\kappa$  на  $n_{\text{эф}}$  и  $\kappa_{\text{эф}}$ . Именно эти величины  $n_{\text{эф}}$  и  $\kappa_{\text{эф}}$  находят на опыте, измеряя, например, углы  $\varphi_0$  и  $\Psi_0$ .

Для вычисления  $\varepsilon'$  или  $\varepsilon'_{\text{эф}}$  нужно обратиться к электронной теории, причем приходится делать ряд существенных предположений. Не вдаваясь в обсуждение этого вопроса, примем, как обычно, что электроны проводимости движутся независимо друг от друга, причем на поверхности Ферми, которая считается сферой, энергия электронов  $W_0 = p_0^2/2m_{\text{эф}} = m_{\text{эф}}v_0^2/2$  и плотность уровней  $2(dY/dW)_0 = (2\pi\hbar)^{-3} \cdot 2^{1/2} \pi m_{\text{эф}}^{3/2} W_0^{1/2}$ . Кроме того предполагается, что роль соударений может быть учтена введением длины свободного пробега  $l_0(T) = v_0/\nu_0(T)$ , где  $v_0$  — скорость на поверхности Ферми,  $\nu_0$  — соответствующее число соударений и  $T$  — температура. Если величина  $\varepsilon'$  имеет смысл, то при принятых предположениях получаем (см., например, (7)):

$$\varepsilon = n^2 - \kappa^2 = \varepsilon_0 - \frac{4\pi \cdot 2^{1/2} e^2 v_0^2 (dY/dW)_0}{\omega^2 + \nu_0^2} = \varepsilon_0 - \frac{4\pi e^2 N}{m(\omega^2 + \nu_0^2)}, \quad (5)$$

$$\sigma = \frac{\pi\hbar\omega}{2\pi} = \frac{e^2 N \nu_0}{m(\omega^2 + \nu_0^2)}, \quad \sigma_0 \equiv \sigma(\omega = 0) = \frac{e^2 N}{m\nu_0}, \quad \gamma = \frac{2\pi^2}{3} k^2 \left( \frac{dY}{dW} \right)_0 = \frac{\pi^2 k^2 N}{m\nu_0^2}$$

где  $\varepsilon_0$  — часть  $\varepsilon$ , не связанная с электронами проводимости, и  $\gamma = c^{(e)}/T$  ( $c^{(e)}$  — электронная часть теплоемкости металла).

Из (5) ясно, что  $\varepsilon$  и  $\sigma$  определяются параметрами  $\nu_0$  и  $N = 2^{1/2} m \nu_0^2 \left( \frac{dY}{dW} \right)_0 = \frac{8\pi}{3} \frac{m}{m_{\text{эф}}} \left( \frac{m_{\text{эф}} v_0}{2\pi\hbar} \right)^3$ , где  $N$  можно назвать «эффективной концентрацией свободных электронов» в металле, поскольку с введением этой величины выражения для  $\varepsilon$  и  $\sigma$  становятся такими же как для свободных электронов с той же концентрацией. Иногда считают электроны в металле совершенно свободными ( $m_{\text{эф}} = m$ ) и полагают  $N = N_{\text{св}} = \frac{8\pi}{3} \left( \frac{m v_0}{2\pi\hbar} \right)^3$ , но такое допущение совершенно необосновано. Нерациональным представляется также определение концентрации свободных электронов как величины  $N' = \frac{8\pi}{3} \left( \frac{m_{\text{эф}} v_0}{2\pi\hbar} \right)^3 = \frac{m_{\text{эф}}}{m} N$ , аналогичной  $N_{\text{св}}$ .

Наибольший интерес представляет область частот, удовлетворяющих условию

$$\omega_0^2 \gg \omega^2 \gg \nu_0^2, \quad (6)$$

\* Мы не будем останавливаться здесь на возможном измерении прозрачности тонких металлических пленок, так как свойства этих пленок могут сильно отличаться от свойств массивного металла. Вместе с тем исследование пленок в ряде отношений весьма интересно (8, 11, 12).

где  $\omega_0$  — частота, отвечающая границе внутреннего фотоэффекта. При условии (6), обычно выполняющемся, если  $10^3 \text{ \AA} \ll \lambda = 2\pi c / \omega \ll 3 \cdot 10^5 \text{ \AA}$  имеем

$$\begin{aligned}\varepsilon &\approx -\frac{4}{3} \beta^{-2} p^2 (1 - p^2 q^2) = -\frac{4\pi e^2 N}{m\omega^2} \left[ 1 - \left( \frac{e^2 N}{m\omega\sigma_0} \right)^2 \right] = -\frac{4\pi e^2 N}{m\omega^2} \left( 1 - \frac{v_0^2}{\omega^2} \right), \\ A &\approx \sqrt{3} \beta q \left( 1 - \frac{1}{8} p^2 q^2 \right) = v_0 \left( \frac{m}{\pi e^2 N} \right)^{1/2} \left( 1 - \frac{1}{8} \frac{v_0^2}{\omega^2} \right), \\ \sin \varphi_0 \operatorname{tg} \varphi_0 &\approx \frac{2}{V^{-3}} \beta^{-1} p \left( 1 - \frac{1}{4} p^2 q^2 \right) = \left( \frac{4\pi e^2 N}{m\omega^2} \right)^{1/2} \left( 1 - \frac{1}{4} \frac{v_0^2}{\omega^2} \right), \\ \operatorname{tg} 2\Psi_0 &\approx 2p^{-1} q^{-1} \left( 1 + \frac{1}{4} p^2 q^2 \right) = \frac{2\omega}{v_0} \left( 1 + \frac{1}{4} \frac{v_0^2}{\omega^2} \right), \\ \beta &= \frac{v_0}{c}, \quad q = \frac{c}{v_0 \sigma_0} \left( \frac{e^2 N}{3\pi m} \right)^{1/2}, \quad p = \frac{3\pi}{\omega} \frac{v_0}{c} \left( \frac{e^2 N}{3\pi m} \right)^{1/2}.\end{aligned}\quad (7)$$

В общем случае, когда скин-эффект нельзя считать нормальным, формулы для  $\varepsilon'_{\text{эф}}$  и других величин получены в (5) (при этом под  $N$  и  $m$  в (5) будем понимать введенные выше величины  $N$  и  $m = 9,1 \cdot 10^{-28}$ , а не  $N'$  и  $m_{\text{эф}}$ ; величины  $\beta$ ,  $q$  и  $p$  в (5) обозначены через  $v$ ,  $\sigma^{-1}$  и  $v^{-1}$ ). Считая отражение электронов от поверхности металла диффузным\*, в наиболее интересной области, где выполнено условие (6) и условие  $\omega^2 \gg \frac{v_0^2}{c^2} \frac{4\pi e^2 N}{m}$ , имеем:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{\text{эф}} &= n_{\text{эф}}^2 - \kappa_{\text{эф}}^2 \approx -\frac{4}{3} \beta^{-2} p^2 + \beta^{-2} p^4 \left( \frac{301}{720} + \frac{5}{2V^{-3}} q + \frac{4}{3} q^2 \right), \\ A &\approx \frac{cR}{\pi} = \frac{4n_{\text{эф}}}{n_{\text{эф}}^2 + \kappa_{\text{эф}}^2} \approx \sqrt{3} \beta \left( \frac{V^{-3}}{4} + q \right) - \\ &- \beta p^2 \left[ \frac{16 \ln 2}{105} + \frac{8723}{80640} + \frac{83 \sqrt{3}}{492} q + \frac{3}{4} q^2 + \frac{V^{-3}}{8} q^3 \right], \\ \sin \varphi_0 \operatorname{tg} \varphi_0 &\approx \sqrt{n_{\text{эф}}^2 + \kappa_{\text{эф}}^2} \approx \frac{2}{V^{-3}} \beta^{-1} p - \beta^{-1} p^3 \left[ \frac{211}{960 V^{-3}} + \frac{3}{8} q + \frac{1}{2V^{-3}} q^2 \right], \\ \operatorname{tg} 2\Psi_0 &\approx \frac{\kappa_{\text{эф}}}{n_{\text{эф}}} \approx \frac{2p^{-1}}{V^{-3/4} + q} \left[ 1 + p^2 \left( \frac{83}{960} + \frac{V^{-3}}{8} q + \frac{1}{8} q^2 + \right. \right. \\ &\left. \left. + \frac{16 \ln 2}{105 V^{-3}} + \frac{8723}{80640 V^{-3}} + \frac{83}{492} q + \frac{V^{-3}}{4} q^2 + \frac{1}{8} q^3 \right) \right].\end{aligned}\quad (8)$$

Формулы (8) переходят в (7), если  $q \gg 1$ , что эквивалентно условию  $\delta \approx c/\omega \sqrt{|\varepsilon|} \gg l_0$ . Даже при комнатных температурах это условие обычно не выполнено.

Из (8) ясно, что учет аномального скин-эффекта (в интересующей нас области частот) в отношении величин  $\varepsilon_{\text{эф}}$  и  $\sin \varphi_0 \operatorname{tg} \varphi_0$  мало существенен. Более того, обычно, имеется область, где с хорошей точностью можно пользоваться предельной формулой

$$N = \frac{|\varepsilon| m \omega^2}{4\pi e^2} \simeq \frac{\sin^2 \varphi_0 \operatorname{tg}^2 \varphi_0 \cdot m \omega^2}{4\pi e^2} = 1,12 \cdot 10^{21} \frac{\sin^2 \varphi_0 \operatorname{tg} \varphi_0}{\lambda^2}, \quad (9)$$

где  $\lambda$  — длина волны в микронах.

\* Тот факт, что отражение обычно бывает диффузным, ясен из (5, 8), а также следует из физических соображений, особенно когда речь идет о поликристаллах, с которыми естественно иметь дело в силу принятых предположений об изотропии.

Для оценки точности этой формулы укажем, что, например, для Cu при  $N = 3,3 \cdot 10^{22}$ ,  $v_0 = 8,3 \cdot 10^7$  (см. ниже) и  $\sigma_0 = 5,3 \cdot 10^{17}$  (при  $17^\circ$ )  $\beta = 2,76 \cdot 10^{-3}$ ,  $q = 0,64$ ,  $p = 5,2 \cdot 10^{-2}$  и, следовательно,  $\sin \varphi_0 \operatorname{tg} \varphi_0 = \sqrt{4\pi e^2 N / m \omega^2}$  с точностью до 0,1%. Формула (9) не содержит никаких величин (типа  $\sigma_0$ ,  $l_0$  и т. п.), чувствительных к примесям, температуре, характеру отражения от поверхности и т. п. Поэтому ее использование является наиболее надежным способом определения величины  $N$ ; можно даже считать выражение (9) определением этой величины.

Используя данные (4) для Au, Ag и Cu, согласно (9) находим  $N$  для этих металлов (см. табл. 1; использованы средние значения  $\sin \varphi_0 \operatorname{tg} \varphi_0$  для трех наибольших  $\lambda$ , указанных в (5);  $\bar{\lambda} \approx 4 \mu$ ). Для Sn использованы данные (14), относящиеся к видимой части спектра и по

Таблица 1

|    | $N_a \cdot 10^{-22}$ | $N \cdot 10^{-22}$<br>согласно (9) | $\gamma$ , $\frac{\text{эрг}}{\text{см}^2 \cdot \text{град}^2}$<br>из (12) | $v_0$ , $\frac{\text{см}}{\text{сек}}$<br>согласно (10) |
|----|----------------------|------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------|
| Au | 5,9                  | 5,2                                | —                                                                          | —                                                       |
| Ag | 5,9                  | 5,7                                | $6,3 \cdot 10^2$                                                           | $1,4 \cdot 10^8$                                        |
| Cu | 8,4                  | 3,3                                | $1,0 \cdot 10^3$                                                           | $8,3 \cdot 10^7$                                        |
| Sn | 3,7                  | 6 (?)                              | $9,0 \cdot 10^2$                                                           | $1,2 \cdot 10^8$ (?)                                    |

ряду причин мало пригодные для применения формулы (9). Поэтому значение  $N$  для Sn весьма ненадежно, между тем как эта величина особенно интересна, поскольку Sn является лучше всего изученным сверхпроводником (значение,  $N$  очень важное для теории сверхпроводимости (7, 12), неизвестно ни для одного сверхпроводника!).

Второй параметр (помимо  $N$ ), который нужно определить на опыте, это скорость  $v_0$ . Для этой цели можно воспользоваться измерениями электронной части теплоемкости, так как согласно (5)

$$v_0 = \pi k \sqrt{\frac{N}{\gamma}} = 1,44 \cdot 10^{-2} \sqrt{\frac{N}{\gamma}}. \quad (10)$$

Соответствующие значения  $v_0$  приведены в табл. 1.

Зная параметры  $N$  и  $v_0$  по формулам (8) и более общим (5), можно провести сравнение теории с опытом\*.

При этом параметры  $p$  и  $q$  должны варьироваться путем соответственного изменения  $\omega$  и  $T$  (так как  $\sigma_0 = \sigma_0(T)$ ). Как ясно из сказанного, современных экспериментальных данных о  $n_{\text{эф}}$  и  $\kappa_{\text{эф}}$  по существу совсем нет, и здесь открывается широкое поле для экспериментальной работы. Что касается задач теории, то важнейшими из них являются учет анизотропии и учет влияния смешанной проводимости, т. е., по существу, выяснение возможностей переноса количественной теории на многовалентные металлы.

Физический институт им. П. Н. Лебедева  
Академии наук СССР

Поступило  
6 V 1954

#### ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- <sup>1</sup> М. В. Волькенштейн, Молекулярная оптика, § 21, 1951. <sup>2</sup> D. G. Avery, Proc. Phys. Soc., **65** B, 425 (1952). <sup>3</sup> J. N. Hodgson, ibid., **67** B, 269 (1954). <sup>4</sup> K. Försterling, V. Fredericksz, Ann. d. Phys., **40**, 201 (1913). <sup>5</sup> R. B. Dingle, Physica, **19**, 311, 348, 729 (1953). <sup>6</sup> G. Reuter, E. H. Sondheimer, Proc. Roy. Soc., **195**, 336 (1948). <sup>7</sup> В. Л. Гинзбург, УФН, **42**, 33 (1950). <sup>8</sup> E. H. Sondheimer, Adv. in Phys., **1**, 1 (1952). <sup>9</sup> T. Holstein, Phys. Rev., **88**, 1427 (1952). <sup>10</sup> М. А. Леонтович, Сборн. Исследования по распространению радиоволн, Изд. АН СССР, 1948. <sup>11</sup> R. B. Dingle, Physica, **19**, 1187 (1953). <sup>12</sup> В. Л. Гинзбург, ЖЭТФ, **21**, 979 (1951). <sup>13</sup> E. F. Burton and al., Phenomena at the Temperatures of Liquid Helium, 1940. <sup>14</sup> П. Ерохин, Ann. d. Phys., **39**, 213 (1912).

\* Заметим, что, зная  $N$  и  $v$ , мы сразу же определяем  $m_{\text{эф}} = \left[ \frac{3(2\pi\hbar)^3 N}{8\pi m v_0^3} \right]^{1/3} = 6,15 \sqrt{\frac{N}{v^3}} \cdot 10^{-27}$ . Для Cu, согласно данным табл. 1,  $m_{\text{эф}} \approx 1,5 m$ .