

Б. Р. МУКМИНОВ

О РАЗЛОЖЕНИИ ПО СОБСТВЕННЫМ ФУНКЦИЯМ ДИССИПАТИВНЫХ ЯДЕР

(Представлено академиком М. В. Келдышем 27 IX 1954)

В настоящей статье рассматривается интегральное уравнение с «диссипативным» ядром $K(x, y)$ ($a \leq x, y \leq b$), т. е. с ядром, «мнимая часть» $\text{Im } K(x, y) = \frac{1}{2i} [K(x, y) - \overline{K(y, x)}]$ которого эрмитово-неотрицательна. Примером диссипативного ядра может служить функция Грина $G(x, y)$ дифференциального оператора $L(y) = -y'' + q(x)y$ ($\text{Im } q(x) \geq 0$, $a \leq x \leq b$) с граничными условиями $y(a) = y(b) + hy'(b)$ ($\text{Im } h \geq 0$). Мы находим некоторые необходимые и достаточные условия полноты системы главных функций диссипативного ядра и достаточные условия разложимости «любой» функции по собственным функциям.

1. Диссипативное ядро $K(x, y)$ ($a \leq x, y \leq b$), удовлетворяющее условиям $\iint_a^b |K(x, y)|^2 dx dy < \infty$, $\int_a^b \text{Im } K(x, x) dx < \infty$, определяет в

L_2 «диссипативный» интегральный оператор $g = Kf = \int_a^b K(x, t)f(t) dt$.

Имеет место следующая теорема М. С. Лившица⁽¹⁾:

Теорема 1. Если $g = Kf$ — диссипативный интегральный оператор, то

$$\sum_{n=1}^{\infty} \text{Im} \left(\frac{1}{\lambda_n} \right) \leq \int_a^b \text{Im } K(x, x) dx, \quad (1)$$

где λ_n — характеристические числа ядра оператора. Система главных функций полна в области значений оператора тогда и только тогда, когда в соотношении (1) имеет место знак равенства.

Доказательство, данное М. С. Лившицем, основано на теории характеристических матриц-функций и на приведении оператора к треугольной модели. Ниже мы приводим простое доказательство этой теоремы, в котором не использовано понятие характеристической матрицы-функции.

Пусть $Sf = \frac{1}{2i}(K - K^*)f$ — мнимая часть диссипативного интегрального оператора $g = Kf$. Имеет место равенство

$$\int_a^b \text{Im } K(x, x) dx = \int_a^b S(x, x) dx = \sum_k \frac{1}{\mu_k}, \quad (2)$$

где μ_k ($k = 1, 2, \dots$) — характеристические числа ядра S .

Нетрудно видеть, что совокупность G функций f , удовлетворяющих условию $Kf = K^*f$ (фундамент оператора) совпадает с линейным многообразием функций, ортогональных ко всем собственным функциям u_k ($k = 1, 2, \dots$) ядра S . Вещественным характеристическим числам соответствуют собственные функции ядра K , которые совместно с функциями, аннулирующими этот оператор, образуют максимальное инвариантное относительно K подпространство (дополнительная компонента $G_{\text{доп}}$) фундамента G . На $G_{\text{доп}}$ оператор $g = Kf$ индуцирует самосопряженный оператор.

Пусть $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n, \dots$ — система главных функций ядра оператора $g = Kf$. Имеют место равенства: $\lambda_n K\varphi_n = \varphi_n$ или $\lambda_n K\varphi_n = \varphi_n + \varphi_{n-1}$. Если $\{\omega_n\}$ ($n = 1, 2, \dots$) — ортонормированная система, полученная из φ_n ($n = 1, 2, \dots$) при помощи последовательной ортогонализации, то $K\omega_n = a_{1n}\omega_1 + a_{2n}\omega_2 + \dots + \frac{1}{\lambda_n}\omega_n$ ($n = 1, 2, \dots$), $(K\omega_n, \omega_n) = \frac{1}{\lambda_n}$ и $\text{Im} \frac{1}{\lambda_n} = (S\omega_n, \omega_n)$. Полагая $h_{nk} = (u_k, \omega_n)$, получим $(S\omega_n, \omega_n) = \sum_k \frac{1}{\mu_k} |h_{nk}|^2$ и, следовательно,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \text{Im} \left(\frac{1}{\lambda_n} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_k \frac{1}{\mu_k} |h_{nk}|^2 = \sum_k \frac{1}{\mu_k} \sum_{n=1}^{\infty} |h_{nk}|^2. \quad (3)$$

Неравенство Бесселя $\sum_{n=1}^{\infty} |h_{nk}|^2 \leq \|u_k\|^2 = 1$ приводит к соотношению:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \text{Im} \left(\frac{1}{\lambda_n} \right) = \sum_k \frac{1}{\mu_k} \sum_{n=1}^{\infty} |h_{nk}|^2 \leq \sum_k \frac{1}{\mu_k}. \quad (4)$$

Из соотношения (4) следует неравенство

$$\sum_{n=1}^{\infty} \text{Im} \frac{1}{\lambda_n} \leq \int_a^b \text{Im} K(x, x) dx.$$

Неравенство (1) доказано.

Если система $\{\varphi_n\}$ полна в пространстве H , являющемся замыканием области значений оператора $*$, то, применяя формулу Парсеваля к полной ортонормированной системе $\{\omega_n\}$, получим $\sum_{n=1}^{\infty} |h_{nk}|^2 = \|u_k\|^2 = 1$ и,

следовательно, в силу равенств (2), (3) и (4), $\sum_{n=1}^{\infty} \text{Im} \left(\frac{1}{\lambda_n} \right) = \int_a^b \text{Im} K(x, x) dx$.

Если же в (1) имеет место знак равенства, то $\sum_k \frac{1}{\mu_k} \sum_{n=1}^{\infty} |h_{nk}|^2 =$

$= \sum_k \frac{1}{\mu_k}$, $\sum_{n=1}^{\infty} |h_{nk}|^2 = 1 = \|u_k\|^2$. Функции u_k входят в замкнутую линейную оболочку функций φ_n , и каждая функция, ортогональная ко всем φ_n ($n = 1, 2, \dots$), должна быть ортогональной ко всем u_k ($k = 1, 2, \dots$). Таким образом, совокупность $\tilde{G}$ функций из H , ортогональных ко всем главным функциям, входит в фундамент G ($\tilde{G} \subset G$). С другой стороны,

* Все собственные функции u_k ($k=1, 2, \dots$) принадлежат пространству H .

если $g \in \tilde{G}$, то $(Kg, \varphi_n) = (K^*g, \varphi_n) = (g, K\varphi_n) = \frac{1}{\lambda_n}(g, \varphi_n) + \begin{cases} 0 \\ \frac{1}{\lambda_n}(g, \varphi_{n-1}) \end{cases} = 0$.

Отсюда следует, что $Kg \in \tilde{G}$. Инвариантное подпространство $\tilde{G}$ фундаментанта должно быть частью дополнительной компоненты $G_{\text{доп}}$. Так как $\tilde{G}$ ортогонально также и ко всем собственным функциям, отвечающим вещественным характеристическим числам, то $\tilde{G} = 0$.

2. Из общей теории интегральных уравнений вытекает, что определитель Фредгольма $D(\lambda)$ непрерывного диссипативного ядра $K(x, y)$ ($a \leq x, y \leq b$) есть целая функция не выше первого рода.

Теорема 2. Симметричность относительно вещественной оси сопряженной индикаторной диаграммы определителя Фредгольма является необходимым и достаточным условием полноты системы главных функций в области значений непрерывного диссипативного ядра.

Следствие 1. Чтобы система главных функций непрерывного диссипативного ядра была полна в области значений этого ядра, достаточно, чтобы определитель Фредгольма $D(\lambda)$ имел нулевой род. Сопряженная индикаторная диаграмма в этом случае сводится к единственной точке $\lambda = 0$.

Следствие 2. Всякое непрерывное диссипативное ядро $K(x, y)$, удовлетворяющее условию Липшица, имеет полную в области значений этого ядра систему главных функций.

В частности, система главных функций дифференцируемого по y непрерывного диссипативного ядра $K(x, y)$ обладает полнотой в области значений этого ядра.

3. Назовем систему $\{\varphi_n\}$ элементов пространства H почти ортонормированной, если каждая линейная комбинация $f = \sum_{n=1}^N c_n \varphi_n$ элементов этой системы удовлетворяет условию

$$m \|f\|^2 < \sum_{n=1}^N |c_n|^2 \leq M \|f\|^2,$$

где $m \leq M$ — положительные постоянные. Каждый вектор $f \in H$ разлагается в смысле среднего квадратичного в ряд по элементам полной почти ортонормированной системы.

Используя треугольную модель диссипативного интегрального оператора (1), можно доказать следующую теорему:

Теорема 3. Пусть $g = Kf$ — интегральный оператор с полным диссипативным ядром $K(x, y)$. Если все характеристические числа λ_n ($n = 1, 2, \dots$) ядра простые и удовлетворяют условиям:

$$\sum_{n=1}^{N-1} \left| \frac{\lambda_N}{\lambda_n} \right| \left| \frac{\operatorname{Im} \lambda_n}{|\lambda_N - \lambda_n|} \right| \leq C, \quad S = \sum_{n,m=1}^{\infty} \frac{\operatorname{Im} \lambda_n \operatorname{Im} \lambda_m}{|\lambda_n - \lambda_m|^2} < \infty,$$

где C не зависит от N , то система собственных функций $\{\varphi_n\}$ является почти ортонормированной системой в L_2 . Необходимо

отметить, что если $f \in L_2$ и $f = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n$, то $m \|f\|^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 \leq M \|f\|^2$,

где $M = \frac{1}{m} = (1 + 2S^{1/2}e^{\sigma})^2$; $\sigma = \sup_N \left\{ \sum_{n=1}^N \left| \frac{\lambda_N}{\lambda_n} \right| \left| \frac{\operatorname{Im} \lambda_n}{|\lambda_N - \lambda_n|} \right| \right\}$.

Таким образом, ограничения, накладываемые лишь на распределение характеристических чисел, могут обеспечить почти ортонормированность системы собственных функций полного диссипативного ядра.

Из теоремы 3 вытекают следующие важные частные случаи теоремы разложения:

1) Если характеристические числа λ_n ($n = 1, 2, \dots$) полного диссипативного ядра все простые и удовлетворяют условиям:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\operatorname{Im} \lambda_n| < \infty, \quad |\lambda_m - \lambda_n| \geq \delta \quad (\delta > 0, m \neq n),$$

то система собственных функций этого ядра почти ортонормирована.

2) Система собственных функций рассматриваемого ядра почти ортонормирована, если характеристические числа λ_n асимптотически выражаются степенями целых чисел:

$$\lambda_n = C_0 n^0 \left\{ 1 + \frac{C_1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right\} \quad (0 \geq 2),$$

где $C_0 \neq 0$, C_1 — вещественные постоянные.

Для дифференциальных уравнений отсюда получается следующий результат:

Система собственных функций дифференциального оператора L , порожденного выражением $l(y) = y^{(n)} + \sum_{k=1}^n P_k(x) y^{(n-k)}$, где $a \leq x \leq b$, и распадающимися краевыми условиями

$$\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_{jk} y^{(k)}(a) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, m;$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} \beta_{jk} y^{(k)}(b) = 0, \quad j = m+1, m+2, \dots, n,$$

не эквивалентными условиями Коши, при $\operatorname{Im}(Ly, y) \geq 0$ является почти ортонормированной системой в L_2^* . В частности, несамосопряженная дифференциальная система четного порядка $m \geq 2$

$$y^{(m)} - q(x)y = -f(x) \quad (\operatorname{Im} q(x) \geq 0, \quad a \leq x \leq b);$$

$$\sum_{k=0}^{m-1} \alpha_{ks} y^{(k)}(a) = \sum_{k=0}^{m-1} \beta_{ks} y^{(k)}(b) = 0 \quad \left(s = 1, 2, \dots, \frac{m}{2} \right)$$

имеет почти ортонормированную в L_2 систему собственных функций.

Одесский государственный
педагогический институт
им. К. Д. Ушинского

Поступило
1 VII 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ М. С. Лившиц, Матем. сборн., 34, № 1 (1954). ² М. В. Келдыш, ДАН, 77, № 1 (1951).

* Собственные числа, начиная с некоторого номера, простые. Полнота системы главных функций следует из одного результата М. В. Келдыша (²).