

З. И. БИГЛОВ

О ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОМ ОПЕРАТОРЕ, ПОРОЖДЕННОМ
СИСТЕМОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ВЫРАЖЕНИЙ
ВТОРОГО ПОРЯДКА

(Представлено академиком М. В. Келдышем 27 IX 1954)

Система дифференциальных выражений второго порядка, написанных в матрично-векторной форме, имеет вид:

$$l(y) = -y'' + P(x)y, \quad (1)$$

где $P(x)$ — вещественная симметрическая матрица, суммируемая в каждом конечном интервале; $y(x) = \{y_1(x), \dots, y_n(x)\}$ — вектор-функция, компоненты которой $y_k(x)$ — числовые функции; x — вещественный параметр ($0 \leq x \leq \infty$). $l(y)$ называется линейным дифференциальным выражением в пространстве вектор-функций. Оно имеет смысл для любой вектор-функции, имеющей непрерывную производную в любом конечном интервале.

Введем гильбертово пространство $L_n^2(0, \infty)$ — пространство всех суммируемых с квадратом вектор-функций со скалярным произведением $(y, z) = \sum_{k=1}^n \int_0^\infty y_k(x) \bar{z}_k(x) dx$; $y_k(x)$, $z_k(x)$ — компоненты $y(x)$ и $z(x)$.

Пусть D означает многообразие всех вектор-функций из $L_n^2(0, \infty)$, имеющих абсолютно-непрерывные первые производные и таких, что $l(y) \in L_n^2(0, \infty)$. Очевидно, D есть максимальное многообразие в $L_n^2(0, \infty)$, на котором операция $l(y)$ имеет смысл и может рассматриваться как оператор L , т. е. область его определения $D_L = D$.

Введем другой оператор равенством $L'_0 y = l(y)$ на многообразии всех вектор-функций из D , равных нулю вне конечного промежутка, которые удовлетворяют условиям

$$y(0) = y'(0) = 0.$$

Оператор L'_0 симметрический, и он допускает замыкание L_0 , которое также является симметрическим оператором.

1. Пользуясь результатами Глазмана ⁽¹⁾, можно показать следующие факты:

Оператор L является сопряженным для оператора L_0 .

Дефектное число m оператора L_0 на интервале $(0, \infty)$ удовлетворяет неравенствам $n \leq m \leq 2n$.

Оператор L_0 допускает самосопряженные расширения, которые вполне характеризуются системой краевых условий.

Резольвента R_λ любого самосопряженного расширения оператора

L_0 есть интегральный оператор, ядро $K(x, t, \lambda)$ которого удовлетворяет условиям

$$\int_0^\infty \|K(x, t, \lambda)\|^2 dx < \infty, \quad \int_0^\infty \|K(x, t, \lambda)\|^2 dt < \infty.$$

В случае оператора L_0 с индексом дефекта $(2n, 2n)$ ядро $K(x, t, \lambda)$ является ядром типа Гильберта — Шмидта, т. е.

$$\int_0^\infty \|K(x, t, \lambda)\|^2 dx dt < \infty.$$

Здесь $\|K\|$ означает норму матрицы K , равную, по определению, наибольшему собственному значению матрицы K^*K (K^* — сопряженная матрица для K).

2. Пусть L_Θ — самосопряженное расширение оператора L_0 , определенное краевыми условиями

$$y'(0) = \Theta y(0), \quad (2)$$

где Θ — вещественная симметрическая матрица.

Далее, пусть $\Omega_1(x, \lambda)$, $\Omega_2(x, \lambda)$ — матрицы из линейно независимых решений уравнения

$$l(y) - \lambda y = 0 \quad (\operatorname{Im} \lambda \neq 0). \quad (3)$$

Их линейные комбинации $\Omega_1 c_1 + \Omega_2 c_2$ (c_1, c_2 — постоянные векторы), удовлетворяющие краевым условиям (2), имеют вид

$$y(x, \lambda) = \Omega(x, \lambda) c,$$

где $\Omega(x, \lambda)$ — матрица из n линейно независимых решений уравнения (3); c — постоянный вектор.

При этих обозначениях справедлива

Теорема 1 (равенство Парсеваля). Пусть $f(x) \in L_n^2(0, \infty)$. Существует не зависящая от $f(x)$ монотонно возрастающая матричная функция распределения $T(\lambda)$ n -го порядка и вектор-функция $F(\lambda)$ (обобщенное преобразование Фурье) такие, что

$$\int_0^\infty \|f(x)\|^2 dx = \int_{-\infty}^\infty F^*(\lambda) dT(\lambda) F(\lambda). \quad (4)$$

$F(\lambda)$ является пределом в среднем квадратичном последовательности непрерывных вектор-функций

$$F_m(\lambda) = \int_0^m \Omega^*(x, \lambda) f(x) dx,$$

т. е.

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^\infty (F - F_m)^* dT(\lambda) (F - F_m) = 0.$$

Из равенства (4) получаются разложения в интеграл Фурье для любой непрерывной в $(0, \infty)$ функции и разложение резольвенты по собственным функциям.

Пусть в дифференциальном выражении (1) матрица $P(x)$ суммируема в промежутке $(0, \infty)$.

В этом случае имеет место:

Теорема 2. *Индекс дефекта оператора L_0 есть (n, n) . Любое самосопряженное расширение оператора L_0 определяется краевыми условиями (2).*

Для решений $\Omega_1(x, \lambda)$ и $\Omega_2(x, \lambda)$ уравнения (3) справедливы асимптотические формулы

$$\Omega_1(x, \lambda) = e^{isx} [I + o(1)], \quad \Omega_2(x, \lambda) = e^{-isx} [I + o(1)]$$

при $x \rightarrow \infty$. Здесь $s = \sqrt{\lambda}$; $o(1)$ — матрица, все элементы которой стремятся к нулю.

Из этих формул получаются следующие теоремы:

Теорема 3. *Спектр оператора L_θ для отрицательных λ дискретен и снизу ограничен.*

Теорема 4. *Спектр оператора L_θ непрерывен на положительной полуоси $\lambda > 0$.*

При доказательстве теорем 1, 2, 3 и 4 использованы результаты М. А. Наймарка⁽²⁻⁴⁾ и Б. М. Левитана^(5, 6).

Теорема 1 другими способами доказана М. Г. Крейном⁽⁷⁾ и А. Ш. Блохом⁽⁸⁾.

Автор пользуется случаем принести глубокую благодарность своему руководителю проф. М. А. Наймарку.

Московский государственный педагогический институт
им. В. И. Ленина

Поступило
24 V 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ И. М. Глазман, Усп. матем. наук, 5, в. 6 (40) (1950). ² М. А. Наймарк, ДАН, 82, № 4 (1952). ³ М. А. Наймарк, ДАН, 85, № 2 (1952). ⁴ М. А. Наймарк, ДАН, 89, № 2 (1953). ⁵ Б. М. Левитан, Разложение по собственным функциям дифференциального уравнения второго порядка, 1950. ⁶ Б. М. Левитан, ДАН, 73, № 4 (1950). ⁷ М. Г. Крейн, ДАН, 74, № 1 (1950). ⁸ А. Ш. Блох, ДАН, 92, № 2 (1953).