

Н. В. АЗБЕЛЕВ

ОБ ОДНОМ ДОСТАТОЧНОМ УСЛОВИИ ПРИМЕНИМОСТИ МЕТОДА ЧАПЛЫГИНА К УРАВНЕНИЯМ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 23 IX 1954)

В настоящей заметке мы рассматриваем уравнение

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \quad (1)$$

с начальными условиями

$$y^{(k)}(x_0) = y_0^{(k)} \quad (k = 0, 1, \dots, n-1).$$

Правую часть (1) будем предполагать непрерывной и удовлетворяющей условиям Липшица с постоянной K в области G пространства $(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$, определяемой неравенствами $x_0 < x < X$, $a_k < y^{(k)} < b_k$ ($k = 0, 1, \dots, n-1$), где $a_k < y_0^{(k)} < b_k$ ($k = 0, 1, \dots, n-1$).

Если $z = z(x)$ есть верхняя (нижняя) функция сравнения ⁽¹⁾ для уравнения (1) относительно области G , то, по обобщенной теореме С. А. Чаплыгина ⁽¹⁾, в некотором промежутке (x_0, x^*) ($x^* \leq X$) выполняются неравенства $z^{(k)} > y^{(k)}$ ($z^{(k)} < y^{(k)}$) ($k = 0, 1, \dots, n-1$). Предлагаемая ниже теорема позволяет выделить такой класс функций сравнения, для которого неравенства $z^{(k)} > y^{(k)}$ ($z^{(k)} < y^{(k)}$) ($k = 0, 1, \dots, n-1$) имеют место во всем данном промежутке (x_0, X) .

Пусть $z = z(x)$ есть функция сравнения для уравнения (1) относительно области G и $u = z - \xi$, где ξ удовлетворяет линейному уравнению

$$\xi^{(n)} = R \sum_{k=0}^{n-1} \xi^{(k)} + (z^{(n)} - f(x, z, z', \dots, z^{(n-1)}))$$

с начальными условиями

$$\xi^{(k)}(x_0) = z^{(k)}(x_0) - y_0^{(k)} \quad (k = 0, 1, \dots, n-1).$$

Пусть, далее, $a_k < u^{(k)} < b_k$ ($x_0 < x < X$; $k = 0, 1, \dots, n-1$).

Лемма 1. Если z — верхняя (нижняя) функция сравнения для уравнения (1) относительно области G , то u — нижняя (верхняя) функция сравнения для уравнения (1) относительно области G .

Лемма 2. Если в некотором промежутке $(x_0, \bar{x})$ ($\bar{x} \leq X$) разность $z^{(n-1)} - y^{(n-1)}$ меняет знак не более одного раза, то разность $u^{(n-1)} - y^{(n-1)}$ не обращается в нуль внутри этого промежутка.

Из этих лемм следует:

Теорема. Для того чтобы в данном промежутке (x_0, X) имели место неравенства $z^{(k)} > y^{(k)}$ ($z^{(k)} < y^{(k)}$) ($k = 0, 1, \dots, n-1$), достаточно, чтобы в этом промежутке выполнялось условие

$$|z^{(n)} - f(x, z, z', \dots, z^{(n-1)})| \geq |u^{(n)} - f(x, u, u', \dots, u^{(n-1)})|.$$

В заключение рассмотрим последовательность $\{z_i\}$, начинающуюся с функции сравнения z_0 для уравнения (1) относительно области G и образованную по закону $z_{i+1} = z_i - \xi_i$, где ξ_i удовлетворяет уравнению

$$\xi_i^{(n)} = K \sum_{k=0}^{n-1} \xi_i^{(k)} + (z_i^{(n)} - f(x, z_i, z_i', \dots, z_i^{(n-1)}))$$

с начальными условиями

$$\xi_i^{(k)}(x_0) = z_i^{(k)}(x_0) - y_0^{(k)} \quad (k = 0, 1, \dots, n-1).$$

На основании вышеприведенных лемм и теоремы можно показать, что эта последовательность равномерно сходится в промежутке (x_0, X) к решению уравнения (1), если неравенства $a_k < z_i^{(k)} < b_k$ ($k = 0, 1, \dots, n-1$) выполняются для любого номера i . При этом всегда найдется такое число N , что для $i > N$ неравенства $z_i^{(k)} > y^{(k)}$ ($z_i^{(k)} < y^{(k)}$) ($k = 0, 1, \dots, n-1$) имеют место во всем данном промежутке (x_0, X) .

Московский станкоинструментальный институт
им. И. В. Сталина

Поступило
12 II 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ Н. В. Азбелев, ДАН, 89, № 4, 589 (1953).