

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

Действительный член АН УССР Г. Н. САВИН

**О ДИНАМИЧЕСКИХ УСИЛИЯХ В ШАХТНОМ ПОДЪЕМНОМ КАНАТЕ.
(ПОДЪЕМ ГРУЗА)**

Допустим, что к нижнему концу подъемного каната, навитого на барабан, который вращается вокруг неподвижной оси O (см. рис. 1) с окружной скоростью $v_c = f(t)$ ($v(0) = 0$), прикреплен груз весом Q , опирающийся на неподвижное основание. При этом подъемный канат в нижнем его конце может быть либо частично, либо полностью, но без образования слабину разгружен от концевой груза Q . Пусть усилия в нижнем конце каната перед началом подъема будут $T_0 = \zeta Q$, где $0 \leq \zeta \leq 1$.

С начала вращения барабана подъемный канат в течение некоторого времени τ будет вытягиваться, и концевой груз Q при $\zeta \neq 1$ будет неподвижно стоять на опоре. Концевой груз Q придет в движение только тогда, когда усилия в нижнем конце каната достигнут величины Q , и с этого момента начнется его подъем вверх. При $\zeta = 1$ груз Q придет в движение после того, когда весь канат в течение τ придет в движение.

Таким образом, при подъеме груза Q неподвижного основания надо различать два этапа: первый этап, продолжительностью τ , — этап снятия концевой груза Q с неподвижного основания, и второй этап — подъем груза Q вверх.

Возьмем начало координат в точке C (рис. 1) и направим ось CX по оси каната вниз. Примем канат за упруго-вязкую нить, т. е. будем пренебрегать его жесткостью при изгибе.

Из рис. 1 для сечения каната в точке A видим, что

$$X = \xi - [x] - u(x, t), \quad (1)$$

где x — нормальная, т. е. недеформированная длина части каната AB ; $u(x, t)$ — удлинение этой части каната; $\xi = X_B$ — переменная длина каната.

При $x = l$, где l — нормальная длина каната в момент времени t , $X = 0$, и из (1) получаем:

$$\xi = l(t) + u(l, t). \quad (2)$$

Уравнение движения элемента каната в точке A будет (1):

$$\frac{q}{g} \frac{\partial^2 X}{\partial t^2} = - \frac{\partial T}{\partial x} + q; \quad (3)$$

здесь q — вес погонного метра каната; T — усилия в поперечном сечении каната, равные

$$T(x, t) = K \frac{\partial u}{\partial x} + \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}, \quad (4)$$

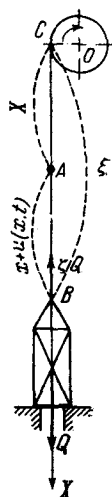


Рис. 1

где $K = E_{\kappa} \omega_{\kappa}$ — жесткость каната при растяжении; E_{κ} — модуль упругости каната, по опытным данным ⁽²⁾ $E_{\kappa} = 1,60 \cdot 10^6 \div 1,70 \cdot 10^6$ кг/мм²; ω_{κ} — площадь металла в поперечном сечении каната; α — коэффициент, характеризующий затухание динамических усилий в подъемном канате ⁽³⁾.

Из (1) получаем:

$$\frac{\partial X}{\partial t} = \frac{d\xi}{dt} - \frac{\partial u}{\partial t}; \quad (5)$$

$$\frac{\partial^2 X}{\partial t^2} = \frac{d^2 \xi}{dt^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \quad (6)$$

Подставляя $\partial^2 X / \partial t^2$ из (6) в (3), получим

$$\frac{q}{g} \left(\frac{d^2 \xi}{dt^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right) = - \frac{\partial T}{\partial x} + q. \quad (7)$$

Добавим к уравнению (7) уравнение движения концевого груза Q

$$\frac{Q}{g} \frac{d^2 \xi}{dt^2} = Q - T(0, t) + R, \quad (8)$$

где R — сила сопротивления движению подъемного сосуда по стволу шахты, которую возьмем в виде

$$R = \beta \left| \left(\frac{\partial X}{\partial t} \right)_{x=0} \right|^{\kappa} = \beta \left| \left[v_c + \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)_{x=0} \right] \right|^{\kappa}; \quad (9)$$

β и κ — постоянные, определяемые опытным путем; $\beta > 0$; $\kappa \geq 1$.

Легко показать ⁽³⁾, что начальные условия для функции $u(x, t)$ для второго этапа подъема при подъеме по трапециoidalной трахограмме ⁽²⁾ с ускорением $a = \text{const}$, если пренебречь изменением длины каната и затуханием усилий за время τ , будут иметь вид:

$$u(x, 0) = m_1 x + m_2 x^2; \quad \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)_{t=0} = m_3 x, \quad (10)$$

где m_1, m_2, m_3 — постоянные, зависящие от: длины отвеса каната в начальный момент l_0 , веса погонного метра каната q , его жесткости K , величины ξ , ускорения a и скорости распространения упругой волны $c \cong 4,2 \cdot 10^3$ м/сек. При $\xi = 1$, т. е. при подъеме свободно висящего на канате груза Q , эти коэффициенты будут равны: $m_1 = \frac{Q}{K}$; $m_2 = \left(1 + \frac{a}{g} \right) \frac{q}{2K}$; $m_3 = c \frac{a}{g} \frac{q}{K}$.

В нижнем конце каната, т. е. в точке B , очевидно, граничное условие будет иметь вид

$$u(0, t) = 0. \quad (11)$$

Пренебрегая проскальзыванием каната по барабану в точке C , т. е. в точке набегания каната на барабан, будем иметь

$$\left(\frac{\partial X}{\partial t} \right)_{x=l} = v_c = \frac{d\xi}{dt} - \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)_{x=l}. \quad (12)$$

Дифференцируя (12) по t , получаем:

$$\frac{d^2 \xi}{dt^2} = \frac{dv_c}{dt} + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} \right)_{x=l} \frac{dl}{dt} + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right)_{x=l}. \quad (13)$$

Из (2) видим, что:

$$\frac{d\xi}{dt} = \frac{dl}{dt} + \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{x=l} \frac{dl}{dt} + \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)_{x=l}. \quad (14)$$

Из (12) и (14) следует, что

$$v_c = \left[1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{x=l} \right] \frac{dl}{dt}. \quad (15)$$

Пренебрегая в (15) величиной $(du/dx)_{x=l}$ в сравнении с единицей, как с величиной малой, находим $v_c = dl/dt$, или

$$l(t) = l_0 + \int_0^t v_c dt, \quad (16)$$

где l_0 — нормальная, т. е. недеформированная, длина каната в начальный момент. Следует заметить, что при подъеме $v_c < 0$ на всем этапе подъема.

Если исключить из (7) и (8) $d^2\xi/dt^2$, то получим очень сложное уравнение, изученное ранее при $\alpha = 0$ и $R = 0$ Н. П. Нероновым⁽¹⁾, для которого до сих пор не удалось получить удовлетворительного приближенного решения. Поэтому поступим иначе, а именно, воспользовавшись идеей метода моментов, построим при помощи уравнений (7) и (8) новую систему интегро-дифференциальных соотношений, которая позволит получить ряд приближенных решений интересующей нас задачи. Для этой цели умножим обе части уравнения (7) на dx , $x dx$, $x^2 dx$, ..., $x^n dx$ и проинтегрируем от 0 до l . Получим, приняв во внимание граничное условие (11), ряд соотношений:

$$\frac{q}{g} \int_0^l \left(\frac{d^2\xi}{dt^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right) dx = T(0, t) - T(l, t) + ql;$$

$$\frac{q}{g} \int_0^l \left(\frac{d^2\xi}{dt^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right) x dx = -lT(l, t) + Ku(l, t) + \alpha \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)_{x=l} + \frac{ql^2}{2};$$

..... (17)

$$\frac{q}{g} \int_0^l \left(\frac{d^2\xi}{dt^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right) x^n dx = -lnT(l, t) + nl^{n-1} \left[Ku(l, t) + \alpha \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)_{x=l} \right] -$$

$$-n(n-1) \int_0^l \left[Ku(x, t) + \alpha \frac{\partial u}{\partial t} \right] x^{n-2} dx + \frac{ql^{n+1}}{n+1}.$$

Исключив из уравнения (9) и первого уравнения системы (17) $T(0, t)$, получим

$$\frac{Q + ql}{g} \frac{d^2\xi}{dt^2} - \frac{q}{g} \int_0^l \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} dx + T(l, t) + R = Q + ql. \quad (18)$$

Подставляя теперь $T(l, t)$ из (18) во второе, третье и т. д. уравнения системы (17), а также внося в эти уравнения значения $d^2\xi/dt^2$ из (13), т. е. из второго граничного условия, и замечая, что $dl/dt = v_c$, получим:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{g} \left(Q + \frac{n}{n+1} ql \right) \left[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right)_{x=l} + v_c \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \right)_{x=l} \right] + \\ & + \frac{q}{g} \int_0^l \left[\left(\frac{x}{l} \right)^n - 1 \right] \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} dx + \frac{n}{l} \left[Ku(l, t) + \alpha \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)_{x=l} \right] - \\ & - \frac{n(n-1)}{l^n} \int_0^l \left[Ku(x, t) + \alpha \frac{\partial u}{\partial t} \right] x^{n-2} dx + \\ & + \frac{1}{g} \left(Q + \frac{n}{n+1} ql \right) \left(\frac{dv_c}{dt} - g \right) + R = 0 \quad (n = 1, 2, \dots). \end{aligned} \quad (19)$$

Легко видеть, что интегро-дифференциальное уравнение (19) при любом n эквивалентно дифференциальным уравнениям (7) и (8) и граничным условиям (11) и (13) в том смысле, что всякое решение этих уравнений с указанными граничными условиями является одновременно и решением интегро-дифференциального уравнения (19). Обратная же теорема, вообще говоря, неверна.

Интегро-дифференциальное уравнение (19) удобно тем, что оно дает возможность построения приближенных решений интересующей нас задачи. Начальные условия (10) наводят на мысль искать функцию $u(x, t)$ в первом приближении в виде

$$u(x, t) = x\varphi(t) + x^2\psi(t). \quad (20)$$

где $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ — неизвестные функции времени t . Начальные условия для искомых функций $\varphi(t)$ и $\psi(t)$, как легко видеть из (10) и (20), будут

$$\varphi(0) = m_1; \quad \varphi'(0) = m_3; \quad \psi(0) = m_2; \quad \psi'(0) = 0. \quad (21)$$

Так как искомых функций две, то из (20) следует взять лишь два уравнения при $n = 1$ и $n = 2$, которые при

$$R = \beta \left[v_c + \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)_{x=0} \right] = -\beta \left[v_c + \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)_{x=l} \right]$$

будут иметь вид

$$\begin{aligned} \frac{1}{g} \left(Q + \frac{ql}{2} \right) \left[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right)_{x=l} + v_c \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \right)_{x=l} \right] + \frac{q}{g} \int_0^l \left[\frac{x}{l} - 1 \right] \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} dx - \beta \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)_{x=0} + \\ + \frac{1}{l} \left[Ku(l, t) + \alpha \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)_{x=l} \right] + \frac{1}{g} \left(Q + \frac{ql}{2} \right) \left(\frac{dv_c}{dt} - g \right) - \beta v_c = 0; \quad (22) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{g} \left(Q + \frac{2}{3} ql \right) \left[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right)_{x=l} + v_c \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \right)_{x=l} \right] + \frac{q}{g} \int_0^l \left[\left(\frac{x}{l} \right)^2 - 1 \right] \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} dx - \beta \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)_{x=0} + \\ + \frac{2}{l} \left[Ku(l, t) + \alpha \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)_{x=l} \right] - \frac{2}{l^2} \int_0^l \left[Ku(x, t) + \alpha \frac{\partial u}{\partial t} \right] dx + \\ + \frac{1}{g} \left(Q + \frac{2}{3} ql \right) \left(\frac{dv_c}{dt} - g \right) - \beta v_c = 0. \quad (23) \end{aligned}$$

Подставив функцию $u(x, t)$ из (20) в уравнения (22) и (23), получим два линейных дифференциальных уравнения второго порядка с переменными коэффициентами, из которых определим при начальных условиях (21) искомые функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$. Найдя функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$, усилие $T(x, t)$ в канате определим по формуле (4).

Институт математики
Академии наук СССР

Поступило
9 III 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ Н. П. Неронов, Прикладн. матем. и мех., 1, в. 1, 91 (1937). ² Г. Н. Савин, В. Г. Бессонов, Докл. АН УССР, № 6 (1951). ³ Г. Н. Савин, Горн. журн., № 2 (1954). ⁴ Г. Н. Савин, Укр. матем. журн., № 2 (1954).