

А. И. ЖУКОВ

ОБ ОДНОМ СЕМЕЙСТВЕ ТОЧНЫХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ ГИДРОДИНАМИКИ

(Представлено академиком М. В. Келдышем 3 VI 1954)

Рассмотрим стационарное осесимметричное движение идеальной сжимаемой жидкости, описываемое системой уравнений

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial r} + \frac{\rho v}{r} = 0, \quad (1)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad (2)$$

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} = 0, \quad (3)$$

$$u \frac{\partial s}{\partial x} + v \frac{\partial s}{\partial r} = 0. \quad (4)$$

Здесь t — время; x — пространственная координата, отсчитываемая вдоль оси симметрии; r — расстояние от этой оси; ρ — плотность; u , v — компоненты скорости; p — давление; s — энтропия. Уравнение состояния среды будем предполагать имеющим вид

$$p = k\rho^\gamma, \quad (5)$$

где k — функция энтропии, γ — постоянная.

Введем функцию тока R посредством соотношения

$$R \, dR = \rho r (u \, dr - v \, dx), \quad (6)$$

интегрируемость правой части которого эквивалентна, как известно, уравнению неразрывности (1). Рассмотрим движения, при которых выполняется условие

$$\rho = r^{-2} F(R).$$

Из уравнений (1) или (6) следует, что величина f , определяемая дифференциалом

$$\frac{df}{f} = \frac{u}{r} dr - \frac{v}{r} dx,$$

есть функция от R . Пусть теперь φ , ψ , P и Q — четыре функции от f (т. е. от R), удовлетворяющие системе трех уравнений (так что одна из этих функций произвольна)

$$\varphi' - \frac{\psi'}{\psi} \varphi + \frac{1}{f} = 0,$$

$$\varphi P' + \frac{\varphi^2 + \psi^2}{2} Q' = 2 \left(\varphi' + \frac{\gamma}{f} \right) P - \left(\frac{\varphi \varphi' + \psi \psi'}{2} + \gamma \frac{\varphi}{f} \right) Q,$$

$$2PQ' - QP' = \frac{2\gamma - 1}{2} \frac{Q^2}{f}$$

(штрихом обозначены производные по f).

Мы получим решение уравнений (1) — (4), положив

$$u = \varphi + \eta Q,$$

$$\frac{v^2}{2} = \frac{\psi^2}{2} + \eta (2P - \varphi Q) - \eta^2 \frac{Q^2}{2},$$

$$\rho = r^{-2} F,$$

$$p = r^{-2\gamma} G,$$

где

$$\eta = \frac{r^{2-2\gamma}}{2-2\gamma}, \quad \gamma \frac{G}{F} = P, \quad \frac{fG'}{F} = Q.$$

Поступило
12 XI 1953