

А. А. ДМИТРИЕВ

ПРОХОЖДЕНИЕ ДВУМЕРНЫХ ВОЛН МАЛОЙ АМПЛИТУДЫ НАД ЗАТОПЛЕННОЙ СТЕНКОЙ

(Представлено академиком В. В. Шулейкиным 12 IV 1954)

В работе автора ⁽¹⁾ было рассмотрено прохождение длинных волн над препятствием. Коэффициент отражения предполагался заданным и связанным с коэффициентом пропускания p соотношением $p = 1 - \alpha$, что позволило упростить анализ. В настоящей работе мы рассмотрим форму свободной поверхности вблизи от подводной стенки при прохождении над ней волн. Гипотеза о длинном характере волн снимается. Жидкость предполагается идеальной, имеющей глубину H . Ось z направим вертикально вверх, ось x — вдоль свободной поверхности.

Для потенциала скорости имеет место уравнение

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0 \quad (1a)$$

с граничными условиями на свободной поверхности:

$$\text{при } z = 0 \quad \zeta = -\frac{1}{g} \frac{\partial \varphi}{\partial t}, \quad (16)$$

Подводная стенка не доходит до свободной поверхности на величину $z = -\delta$, поднимаясь со дна на высоту D в точке $x = L$.

Предполагается заданным потенциал волн, подходящих к стенке, в виде

$$\varphi_{11} = \frac{a_{11}g}{\sigma} \frac{\text{ch } k(z+H)}{\text{ch } kH} \sin [k(x-L) - \sigma t], \quad (2)$$

где a_{11} — возвышение (амплитуда) подходящих волн; kL — сдвиг фаз; $\lambda = 2\pi/k$ — длина волн; $T = 2\pi/\sigma$ — период волн.

Пусть потенциал отраженной волны

$$\varphi_{12} = -\frac{a_{12}g}{\sigma} \frac{\text{ch } k(z+H)}{\text{ch } kH} \sin [k(x-L) + \sigma t], \quad (3)$$

а прошедшей за препятствие

$$\varphi_2 = \frac{a_2g}{\sigma} \frac{\text{ch } k(z+H)}{\text{ch } kH} \sin [k(x-L) - \sigma t]. \quad (4)$$

Наличие подводной стенки требует введения дополнительных краевых условий: отсутствие горизонтальной составляющей скорости у стенки при $x = L$, $-H < z < -\delta$ и баланс количества движения при $x = L$, $-\delta < z < 0$.

Для удовлетворения всем поставленным условиям необходимо ввести в рассмотрение также и краевые волны. Перед стенкой

их потенциал будет:

$$\bar{\varphi}_1 = \frac{g}{\sigma} \sum_{n=1}^{\infty} b_{1n} \psi_n(z) e^{q_n(x-L)} \cos \sigma t; \quad (5)$$

за стенкой потенциал краевых волн равен:

$$\bar{\varphi}_2 = \frac{g}{\sigma} \sum_{n=1}^{\infty} b_{2n} \psi_n(z) e^{-q_n(x-L)} \cos \sigma t. \quad (6)$$

Здесь

$$\psi_n(z) = \cos q_n z + \frac{\sigma^2}{g q_n} \sin q_n z, \quad (7)$$

причем функции $\bar{\varphi}_1$ и $\bar{\varphi}_2$ удовлетворяют обычному условию на свободной поверхности

$$\frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial t^2} + g \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial z} = 0 \quad \text{при } z = 0 \quad (8)$$

и условию непроницаемости дна

$$\partial \bar{\varphi} / \partial z = 0 \quad \text{при } z = -H, \quad (9)$$

если q_n найдено из трансцендентного уравнения

$$\sigma^2 / g q_n = -\operatorname{tg} q_n H. \quad (10)$$

Период колебаний $T = 2\pi / \sigma$ предполагается заданным и одинаковым во всех слагаемых колебаниях.

Условия у стенки при $x = L$ можно записать в виде:

$$\text{при } 0 < z < -\delta: \quad \text{для } x = L - 0 \quad \frac{\partial \bar{\varphi}_1}{\partial x} = -\frac{\partial \varphi_{12}}{\partial x}; \quad (11)$$

$$\text{для } x = L + 0 \quad \frac{\partial \bar{\varphi}_2}{\partial x} = -\frac{\partial (\varphi_{12} - \varphi_{11})}{\partial x}; \quad (12)$$

$$\text{при } -\delta < z < -H: \quad \text{для } x = L - 0 \quad \frac{\partial \bar{\varphi}_1}{\partial x} = -\frac{\partial (\varphi_{12} + \varphi_{11})}{\partial x}; \quad (13)$$

$$\text{для } x = L + 0 \quad \frac{\partial \bar{\varphi}_2}{\partial x} = -\frac{\partial \varphi_2}{\partial x}. \quad (14)$$

Для определения неизвестных коэффициентов a_{12} , a_2 , b_{1n} , b_{2n} будем последовательно умножать равенства (11) — (14) на фундаментальные функции задачи и интегрировать по z в пределах от 0 до $-H$. Вводим для краткости обозначения:

$$G \equiv G(0, \delta) = - \int_0^{-\delta} \operatorname{ch}^2 k(\xi + H) d\xi; \quad M = G(0, H);$$

$$N_n \equiv N_n(0, \delta) = \int_0^{-\delta} \psi_n(\xi) \operatorname{ch} k(\xi + H) d\xi; \quad M_n = - \int_0^{-H} \psi_n^2(\xi) d\xi. \quad (15)$$

Отношение коэффициентов к амплитуде падающей волны дает: коэффициент отражения

$$\alpha \equiv \frac{a_{12}}{a_{11}} = \frac{M - G}{M}; \quad (16)$$

коэффициент пропускания

$$p = \frac{a_2}{a_{11}} = \frac{G}{M}; \quad (17)$$

коэффициент для стоячей волны слева

$$\frac{b_{1n}}{a_{11}} = -\frac{k}{q_n \operatorname{ch} kH} \frac{N_n}{M_n}; \quad (18)$$

коэффициент для стоячей волны справа

$$\frac{b_{2n}}{a_{11}} = \frac{k}{q_n \operatorname{ch} kH} \frac{N_n}{M_n}. \quad (19)$$

Вычисления дают:

$$\begin{aligned} M &= \frac{1}{4k} [2kH + \operatorname{sh} 2kH]; \\ N_n &= \frac{1}{k^2 + q_n^2} \left\{ \frac{k \operatorname{sh} k(H - \delta) \cos q_n(H - \delta) + q_n \operatorname{ch} k(H - \delta) \sin q_n(H - \delta)}{\cos q_n H} \right\}; \\ G &= \frac{1}{4k} [\operatorname{sh} 2kH - \operatorname{sh} 2k(H - \delta) + 2k\delta]; \\ M_n &= \frac{1}{2} \left\{ H \left[1 + \left(\frac{\sigma^2}{q_n g} \right)^2 \right] - \frac{\sigma^2}{q_n^2 g} \right\}. \end{aligned} \quad (20)$$

Тогда вместо (16) и (17) на основании (20) можно написать:

$$\alpha = \frac{2k(H - \delta) + \operatorname{sh} 2k(H - \delta)}{2kH + \operatorname{sh} 2kH}, \quad p = \frac{\operatorname{sh} 2kH - \operatorname{sh} 2k(H - \delta) + 2k\delta}{\operatorname{sh} 2kH + 2kH}. \quad (21)$$

Полученные выражения удовлетворяют принятым нами ранее ⁽¹⁾ предположениям, что $p = 1 - \alpha$.

Суммарный потенциал скорости перед и за перегородкой, соответственно, можно записать теперь в виде:

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= \frac{a_{11}g}{\sigma} \frac{1}{\operatorname{ch} kH} \left\{ \operatorname{ch} k(z + H) \left[-2 \frac{M - G}{M} \cos k(x - L) \sin \sigma t + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{G}{M} \sin [k(x - L) - \sigma t] \right] - k \sum_{n=1}^{\infty} \frac{N_n}{q_n M_n} \psi_n(z) e^{q_n(x-L)} \cos \sigma t \right\}, \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} \Phi_2 &= \frac{a_{11}g}{\sigma} \frac{1}{\operatorname{ch} kH} \left\{ \operatorname{ch} k(z + H) \left[\frac{G}{M} \sin [k(x - L) - \sigma t] + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + k \sum_{n=1}^{\infty} \frac{N_n}{q_n M_n} \psi_n(z) e^{-q_n(x-L)} \cos \sigma t \right] \right\}. \end{aligned} \quad (23)$$

Форма свободной поверхности, в соответствии с выражением (16), определится в виде:
слева от перегородки:

$$\begin{aligned} \frac{\zeta_1}{a_{11}} &= 2 \frac{M - G}{M} \cos k(x - L) \cos \sigma t + \frac{G}{M} \cos [k(x - L) - \sigma t] - \\ &\quad - \frac{k}{\operatorname{ch} kH} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{N_n}{q_n M_n} e^{q_n(x-L)} \sin \sigma t; \end{aligned} \quad (24)$$

справа от перегородки:

$$\frac{\zeta_2}{a_{11}} = \frac{G}{M} \cos [k(x - L) - \sigma t] + \frac{k}{\operatorname{ch} kH} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{N_n}{q_n M_n} e^{-q_n(x-L)} \sin \sigma t. \quad (25)$$

Можно видеть, что бегущая волна с обеих сторон от перегородки одинакова. На нее накладывается перед препятствием стоячая волна, дающая резкие взбросы у самой перегородки.

Внешняя картина колебаний должна существенно отличаться от идеальных стоячих синусоидальных волн и, на первый взгляд, представляться у самой стенки достаточно сложной. В связи с этим, например, Макань ⁽²⁾ при рассмотрении отражения от погруженного сверху параллелепипеда исключает некоторую область близ самого тела. В нашей постановке задачи удастся рассмотреть и движения в непосредственной близости от стенки. Лишь при распространении анализа на волны больших амплитуд следует учесть частичное разрушение волн, происходящее при всплесках.

Поле горизонтальных скоростей перед и за препятствием имеет, соответственно, вид:

$$u_1 = a_{11} \frac{gk}{\sigma} \frac{1}{\operatorname{ch} kH} \left\{ \operatorname{ch} k(z+H) \left[2 \frac{M-G}{M} \sin k(x-L) \sin \sigma t + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{G}{M} \cos [k(x-L) - \sigma t] \right] - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{N_n}{M_n} \psi_n(z) e^{q_n(x-L)} \cos \sigma t \right\}; \quad (26)$$

$$u_2 = \frac{a_{11} gk}{\sigma} \frac{1}{\operatorname{ch} kH} \left\{ \operatorname{ch} k(z+H) \frac{G}{M} \cos [k(x-L) - \sigma t] - \right. \\ \left. - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{N_n}{M_n} \psi_n(z) e^{-q_n(x-L)} \cos \sigma t \right\}. \quad (27)$$

Найдем также изменение во времени придонного давления, представляющее интерес в связи с некоторой неопределенностью, существующей в представлении о донной волне в гидротехнике. Это же явление может наблюдаться при подходе некоторых типов атмосферных волн к резко возвышающимся горным хребтам.

Дифференцируя (22), меняя знак и полагая $z = -H$, находим

$$(p - \rho gH) = \rho \frac{a_{11} g}{\operatorname{ch} kH} \left\{ 2 \frac{M-G}{M} \cos k(x-L) \cos \sigma t + \right. \\ \left. + \frac{G}{M} \cos [k(x-L) - \sigma t] - k \sum_{n=1}^{\infty} \frac{N_n e^{q_n(x-L)}}{q_n M_n \cos q_n H} \sin \sigma t \right\}. \quad (28)$$

Выражение (28) показывает, что давление близ препятствия у нижней границы жидкости содержит три основных типа колебаний: 1) обычная стоячая синусоидальная волна с максимумом у самой стенки; 2) бегущая волна, пропадающая в случае доходящей до свободной поверхности стенки; 3) стоячие колебания, амплитуда которых затухает с удалением от препятствия.

Поступило
27 II 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ А. А. Дмитриев, ДАН, **90**, № 4, 509 (1953). ² О. Массagne, С. R., **236**, № 7, 660 (1953).