

Б. Н. РАХМАНОВ

К ТЕОРИИ ОДНОЛИСТНЫХ ФУНКЦИЙ

(Представлено академиком В. И. Смирновым 14 V 1954)

§ 1. Рассмотрим некоторую односвязную область D комплексной плоскости $w = u + vi$, содержащую точку $w = 0$ и не содержащую точки $w = \infty$.

Введем определения:

Область D назовем областью вида D_{px} , если для любой точки M границы области D , не лежащей на оси u , существует такое a , что ветвь параболы $v = \sqrt{2p(u-a)}$ (p — постоянное) проходит через точку M и что часть этой ветви между точкой M и осью u полностью принадлежит к области D .

Область D назовем областью вида D_{py} , если для любой точки M границы области D , не лежащей на оси u , существует такое a , что ветвь параболы $\sqrt{2pv} = a - u$ (p — постоянное), проходит через точку M и что часть этой ветви между точкой M и осью u полностью принадлежит к области D .

Область D назовем областью вида $D_{p\theta}$, если для каждой точки M границы области D существует такое θ , что ветвь параболы $\rho \sin^2(\psi - \theta) = 2p \cos(\psi - \theta)$ (p — постоянное) проходит через точку M и что часть этой ветви между точкой M и началом координат плоскости w полностью лежит в области D .

Пусть окружность радиуса r с центром в начале координат плоскости w принадлежит области D и каждая точка M границы области D лежит на некоторой касательной к этой окружности. Для определенности выберем на всех касательных некоторое (одно и то же) положительное направление и будем считать точку M всегда лежащей в положительном направлении от точки касания A . Назовем область D областью вида D_{rh} , если отрезок касательной между точками M и A принадлежит для любой точки M к области D .

Пусть парабола $v^2 = 2pu$ принадлежит к области D и каждая точка M границы области D лежит на некоторой касательной к этой параболе. Выбрав положительное направление на касательных, будем считать точку M всегда лежащей в положительном направлении от точки касания A . Если отрезок касательной между точками M и A принадлежит для любой точки M к рассматриваемой области D , назовем эту область областью вида D_{ph} .

Пусть парабола $v^2 = 2p(u-q)$ (p, q — постоянные, $p > 0$, $q > 0$) принадлежит дополнению к области D и каждая точка M границы области D лежит на некоторой касательной к этой параболе. Выбрав положительное направление на касательной, будем считать точку M всегда лежащей в положительном направлении от точки касания A . Если отрезок касательной между точкой M и точкой A принадлежит для любой точки M дополнению к рассматриваемой области D , назовем эту область областью вида D_{dph} .

Предположим, что границы рассматриваемых областей в случаях D_{px} , D_{py} , D_{ph} являются замкнутыми жордановыми кривыми расширен-

ной плоскости, проходящими через бесконечно удаленную точку. В случаях D_{rh} , $D_{p\theta}$ они могут быть как замкнутыми жордановыми кривыми, расположенными в конечной части плоскости, так и замкнутыми жордановыми кривыми расширенной плоскости. Для упрощения будем рассматривать и эти области как бесконечные, заметив, что полученные результаты справедливы и для конечных областей вида D_{rh} , $D_{p\theta}$.

Пусть функции $f_n(z)$, $n = 1, 2, \dots, 6$, непрерывны в обобщенном смысле (с учетом бесконечно далекой точки) в $|z| \leq 1$ и обращаются в ∞ в некоторой точке z_1 окружности $|z| = 1$ и все эти функции являются аналитическими в $|z| \leq 1$ всюду за исключением конечного числа граничных точек. Требование аналитичности на окружности $|z| = 1$ можно ослабить. Предположим, что все эти функции нормированы, т. е.

$$f_n(0) = 0, \quad f'_n(0) = 1, \quad n = 1, 2, \dots, 6.$$

Теорема 1. Для того чтобы функция $w = f_1(z)$ была однолистной в $|z| < 1$ и отображала единичный круг на область вида D_{px} , необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\operatorname{Im} f_1(z) \cdot \operatorname{Re} z f'_1(z) + p \operatorname{Im} z f'_1(z) \geq 0, \quad p > 0,$$

при всех $z = e^{i\varphi}$, $0 \leq \varphi < 2\pi$, за исключением конечного числа точек.

Теорема 2. Для того чтобы функция $w = f_2(z)$ была однолистной в $|z| < 1$ и отображала единичный круг на область вида D_{py} , необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\sqrt{2} \operatorname{Im} f_2(z) \cdot \operatorname{Im} z f'_2(z) - \sqrt{p} \operatorname{Re} z f'_2(z) \geq 0, \quad p > 0,$$

при всех $z = e^{i\varphi}$, $0 \leq \varphi < 2\pi$, за исключением конечного числа точек.

Теорема 3. Для того чтобы функция $w = f_3(z)$ была однолистной в $|z| < 1$ и отображала единичный круг на область вида $D_{p\theta}$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\operatorname{Re} \left(\sqrt{2} \sqrt{p^2 + |f_3(z)|^2} + i \sqrt{p} \sqrt{p^2 + |f_3(z)|^2 - p^2} \right) \frac{z f'_3(z)}{f_3(z)} \geq 0, \quad p > 0,$$

при всех $z = e^{i\varphi}$, $0 \leq \varphi < 2\pi$, за исключением конечного числа точек.

Теорема 4. Для того чтобы функция $w = f_4(z)$ была однолистной в $|z| < 1$ и отображала единичный круг на область вида D_{rh} , необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\operatorname{Re} \left(1 + \frac{ir}{\sqrt{|f_4(z)|^2 - r^2}} \right) \frac{z f'_4(z)}{f_4(z)} \geq 0, \quad r > 0,$$

при всех $z = e^{i\varphi}$, $0 \leq \varphi < 2\pi$, за исключением конечного числа точек.

Теорема 5. Для того чтобы функция $w = f_5(z)$ была однолистной в $|z| < 1$ и отображала единичный круг на область вида $D_{p\theta}$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$p \operatorname{Im} z f'_5(z) + (\operatorname{Im} f_5(z) + \sqrt{[\operatorname{Im} f_5(z)]^2 - 2p [\operatorname{Re} f_5(z)]}) \operatorname{Re} z f'_5(z) \leq 0, \quad p > 0,$$

при всех $z = e^{i\varphi}$, $0 \leq \varphi < 2\pi$, за исключением конечного числа точек.

Теорема 6. Для того чтобы функция $w = f_6(z)$ была однолистной в $|z| < 1$ и отображала единичный круг на область вида $D_{арк}$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$[\operatorname{Im} f_6(z) + \sqrt{[\operatorname{Im} f_6(z)]^2 - 2p \operatorname{Re} f_6(z) + 2pq}] \operatorname{Re} z f'_6(z) + p \operatorname{Im} z f'_6(z) \geq 0, \\ p > 0, \quad q > 0,$$

при всех $z = e^{i\varphi}$, $0 \leq \varphi < 2\pi$, за исключением конечного числа точек.

Доказательство всех этих теорем следует непосредственно из следующих соображений. Пусть $v = \omega(u, a)$ ($\alpha < u < \beta$; $\alpha_1 < a < \beta_1$) определяет семейство кривых, зависящих от параметра a , обладающее тем свойством, что через каждую конечную точку некоторой конечной или бесконечной области G проходит только одна кривая рассматриваемого семейства. Предположим, что функция $v = \omega(u, a)$ дифференцируема по обоим аргументам в интервалах (α, β) , (α_1, β_1) , которые могут быть бесконечными в обе стороны, и $d\omega/da \neq 0$. Аналогично можно рассматривать семейство кривых, заданных в полярных координатах $\rho = \rho(\psi - \theta)$ (θ — параметр).

Пусть функция $w = f(z)$, аналитическая в круге $|z| < 1$, отображает круг $|z| \leq 1$ на область, граница которой Γ полностью расположена в области G . Функции $f(z) = u + iv$ и $v = \omega(u, a)$ устанавливают некоторое соответствие между точками окружности $z = e^{i\varphi}$ ($0 \leq \varphi < 2\pi$) и значениями параметра a . Если это соответствие взаимно-однозначно, граница Γ является простой кривой, а следовательно, функция $w = f(z)$ однолистка в $|z| < 1$ (¹), т. е. функция $a = a(\varphi)$, определяемая из соотношений

$$v = \omega(u, a); \quad u + iv = f(e^{i\varphi}), \quad (1)$$

должна быть монотонной. Отыскивая производную $da/d\varphi$ из соответствующих функций вида (1) и полагая $da/d\varphi \geq 0$, получим условия всех приведенных теорем. Заметим, что на основании этих соображений легко получить и другие аналогичные признаки однолистности аналитических в $|z| < 1$ функций. Очевидно, что признаки теорем 3 и 4 являются обобщениями известного признака звездообразности аналитической в $|z| < 1$ функции $w = f(z)$.

§ 2. Рассмотрим класс функций (Σ) вида

$$F(z) = \frac{1}{z} + \alpha_1 z + \alpha_2 z^2 + \dots,$$

регулярных в $|z| < 1$ за исключением простого полюса при $z = 0$. Пусть эти функции являются аналитическими на окружности $|z| = 1$, за исключением конечного числа точек, и непрерывными во всех точках окружности $|z| = 1$. Предположим, что области D_{rk} и $D_{p\theta}$, определенные выше, расположены в конечной части плоскости w . Определим бесконечные области вида $D'_{дрк}$ (соответственно $D'_{дп\theta}$) как такие, для которых области вида D_{rk} ($D_{p\theta}$) являются дополнениями.

Теорема 7. Для того чтобы функция $w = F_1(z) \in \Sigma$ была однолистной в $|z| < 1$ и отображала единичный круг на область вида $D'_{арк}$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\operatorname{Re} \left(1 + \frac{ir}{\sqrt{|F_1(z)|^2 - r^2}} \right) \cdot \frac{z F'_1(z)}{F_1(z)} \leq 0, \quad r > 0,$$

при всех $z = e^{i\varphi}$, $0 \leq \varphi < 2\pi$, за исключением конечного числа точек.

Теорема 8. Для того чтобы функция $w = F_2(z) \in \Sigma$ была однолистной в $|z| < 1$ и отображала единичный круг на область вида D_{ap} , необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\operatorname{Re} \left(\sqrt{2} \sqrt{p^2 + |F_2(z)|^2} + i \sqrt{p \sqrt{p^2 + |F_2(z)|^2} - p^2} \right) \frac{z F_2'(z)}{F_2(z)} \leq 0, \quad p > 0,$$

при всех $z = e^{i\varphi}$, $0 \leq \varphi < 2\pi$, за исключением конечного числа точек.

Поступило
11 V 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ А. И. Маркушевич, Теория аналитических функций, 1950.