

М. А. НАЙМАРК

О НЕПРИВОДИМЫХ ЛИНЕЙНЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЯХ СОБСТВЕННОЙ ГРУППЫ ЛОРЕНЦА

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 21 V 1954)

1. Общие понятия и постановка задачи. Пусть $\mathfrak{G}$ — произвольная локально бикомпактная группа. Как известно, линейным представлением группы $\mathfrak{G}$ в комплексном пространстве Банаха R называется всякое отображение $g \rightarrow T_g$, обладающее следующими свойствами: 1) T_g есть ограниченный линейный оператор в R при любом $g \in \mathfrak{G}$; 2) $T_e = 1$, где e — единичный элемент в $\mathfrak{G}$, а 1 — единичный оператор в R ; 3) $T_{g_1 g_2} = T_{g_1} T_{g_2}$ для любых $g_1, g_2 \in \mathfrak{G}$; 4) $f(T_g \xi)$ есть непрерывная функция от g для любого $\xi \in R$ и любого линейного функционала $f \in \bar{R}$ ($\bar{R}$ — пространство, сопряженное с R).

В дальнейшем мы будем рассматривать линейные представления только в рефлексивных (регулярных) пространствах, не оговаривая этого особо.

Два линейных представления $g \rightarrow T'_g$ и $g \rightarrow T''_g$ в пространствах R' и R'' мы будем называть эквивалентными, если существует замкнутый линейный оператор A с областью определения $\mathfrak{D}_A \subset R'$ и изменения $\Delta_A \subset R''$, обладающий следующими свойствами: 1) $\mathfrak{D}_A$ и Δ_A плотны в R' и R'' , соответственно; 2) если $\xi \in \mathfrak{D}_A$ и $\xi \neq 0$, то $A\xi \neq 0$; 3) если $\xi \in \mathfrak{D}_A$, то при любом $g \in \mathfrak{G}$ также $T'_g \xi \in \mathfrak{D}_A$ и $AT'_g \xi = T''_g A\xi$.

Таким образом, пространства R' и R'' двух эквивалентных представлений могут и не быть изометричными, что сразу уничтожает необозримость в описании представлений, возникающую от слишком тонкого различия пространств. Это обстоятельство нам представляется преимуществом данного определения эквивалентности, отвечающим существу вопроса, ибо с точки зрения теории представлений важна не норма, а формула, определяющая представление.

Отметим, что для конечномерных представлений это определение эквивалентности тривиальным образом совпадает с обычным определением и что два эквивалентных унитарных представления унитарно эквивалентны.

Множество линейных ограниченных операторов в R называется вполне неприводимым*, если всякий линейный ограниченный оператор в R есть слабый предел некоторой последовательности операторов этого множества.

Пусть $L(\mathfrak{G})$ — совокупность всех непрерывных функций $x(g)$ на $\mathfrak{G}$, равных нулю вне компактного множества (своего для каждой функции), а dg — дифференциал инвариантной меры в $\mathfrak{G}$. Представление $g \rightarrow T_g$ называется вполне неприводимым, если операторы

$$T_x = \int x(g) T_g dg,$$

где $x(g)$ пробегает $L(\mathfrak{G})$, образуют вполне неприводимое множество.

* Это понятие принадлежит Годаману (3).

В случае конечномерного или унитарного представления вполне неприводимость и неприводимость означают одно и то же.

В связи с этими определениями естественно поставить следующую общую задачу:

Для данной группы $\mathfrak{G}$ определить все с точностью до эквивалентности вполне неприводимые представления этой группы.

В настоящей заметке мы приводим решение этой задачи для собственной группы Лоренца*. Метод решения является дальнейшим развитием метода, примененного ранее автором в ⁽⁴⁾ для описания всех унитарных представлений комплексных классических групп. Отметим, что при надлежащем обобщении этот метод может быть применен для описания всех вполне неприводимых представлений полупростых групп Ли.

Вместо собственной группы Лоренца нам удобно будет рассматривать локально ей изоморфную группу $\mathfrak{A}$ комплексных матриц $a = \|a_{ik}\|$, $i, k = 1, 2$, второго порядка с определителем, равным единице. Определив все вполне неприводимые представления группы $\mathfrak{A}$, мы определим все однозначные и двузначные вполне неприводимые представления собственной группы Лоренца.

2. Полная серия вполне неприводимых бесконечномерных представлений группы $\mathfrak{A}$. Обозначим через $\mathfrak{U}$ совокупность всех унитарных матриц $u \in \mathfrak{A}$; тогда $\mathfrak{U}$ — компактная подгруппа группы $\mathfrak{A}$. Обозначим далее через Γ совокупность всех диагональных матриц

$$\gamma = \begin{vmatrix} e^{-i\varphi} & 0 \\ 0 & e^{i\varphi} \end{vmatrix}, \quad \text{Im } \varphi = 0,$$

а через $L_2^m(\mathfrak{U})$ — совокупность всех измеримых функций $f(u)$, удовлетворяющих условиям:

$$f(\gamma u) = e^{im\varphi} f(u), \quad \int |f(u)|^2 du < \infty; \quad (1)$$

при этом du обозначает дифференциал инвариантной меры в $\mathfrak{U}$. Очевидно, $L_2^m(\mathfrak{U})$ — гильбертово пространство.

Определим в $L_2^m(\mathfrak{U})$ оператор T_a , полагая

$$T_a f(u) = \frac{\alpha(ua)}{\alpha(u\bar{a})} f(u\bar{a}), \quad (2)$$

где

$$\alpha(a) = |a_{22}|^{-m+i\rho-2} a_{22}^m, \quad (3)$$

m — целое, ρ — комплексное число; наконец, $\bar{u}\bar{a}$ обозначает унитарную матрицу u' , определенную условием $ua = ku'$, где k — матрица вида

$$k = \begin{vmatrix} \lambda^{-1} & \mu \\ 0 & \lambda \end{vmatrix}. \quad (4)$$

I. При любом $a \in \mathfrak{A}$ оператор T_a ограничен и соответствие $a \rightarrow T_a$ есть линейное представление группы $\mathfrak{A}$.

Обозначим через $S_{m,\rho}$ это представление.

II. При $\rho^2 \neq -(|m| + 2n)^2$, $n = 1, 2, \dots$, представление $S_{m,\rho}$ вполне неприводимо.

Совокупность всех представлений $S_{m,\rho}$ при $\rho^2 \neq -(|m| + 2n)^2$, $n = 1, 2, \dots$, мы будем называть полной серией бесконечномерных представлений группы $\mathfrak{A}$.

* Описание всех неприводимых унитарных представлений группы Лоренца было дано в работе И. М. Гельфанда и автора ^(1,2).

III. Представления $S_{m, \rho}$ и $S_{-m, -\rho}$ полной серии эквивалентны; представления S_{m_1, ρ_1} , S_{m_2, ρ_2} при $(m_1, \rho_1) \neq (m_2, \rho_2)$ и $(m_1, \rho_1) \neq (-m_2, -\rho_2)$ неэквивалентны.

Полную серию можно также реализовать следующим образом. Пусть $\sigma = \operatorname{Im} \rho \geq 0$ и $p = (2n + 4)(\sigma + 2)^{-1}$, где n — целое число, определяемое условиями $2n \leq \sigma < 2n + 2$. Обозначим через R_p совокупность всех измеримых функций $f(z)$ комплексного переменного $z = x + iy$, удовлетворяющих условию

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\sum_{v=1}^n |z|^{2v} \right) |f(z)|^p dx dy < \infty; \quad (5)$$

очевидно, R_p — рефлексивное пространство Банаха. Определим в R_p оператор T_a по формуле

$$T_a f(z) = |a_{12}z + a_{22}|^{-m+ip-2} (a_{12}z + a_{22})^m f\left(\frac{a_{11}z + a_{21}}{a_{12}z + a_{22}}\right); \quad (6)$$

оператор T_a ограничен и соответствие $a \rightarrow T_a$ есть представление группы $\mathfrak{U}$. При $\rho^2 \neq -(|m| + 2n)^2$, $n = 1, 2, \dots$, это представление вполне неприводимо и эквивалентно представлению $S_{m, \rho}$ полной серии.

3. Спинорные представления группы $\mathfrak{U}$. Для полноты приведем также хорошо известные спинорные представления группы $\mathfrak{U}$. Пусть $R_{\mu\nu}$ — совокупность всех многочленов $p(z, \bar{z})$ от z и $\bar{z}$ степени $\leq \mu$ относительно z и степени $\leq \nu$ относительно $\bar{z}$; $R_{\mu\nu}$ — конечномерное пространство размерности $(\mu + 1)(\nu + 1)$. Формула

$$T_a p(z, \bar{z}) = (a_{12}z + a_{22})^\mu (\overline{a_{12}z + a_{22}})^\nu p\left(\frac{a_{11}z + a_{21}}{a_{12}z + a_{22}}, \frac{\overline{a_{11}z + a_{21}}}{\overline{a_{12}z + a_{22}}}\right) \quad (7)$$

определяет линейный оператор T_a , и соответствие $a \rightarrow T_a$ есть неприводимое, следовательно, вполне неприводимое представление группы $\mathfrak{U}$. Это представление называется ее спинорным представлением. Спинорное представление в $R_{\mu\nu}$ обозначим через $D_{\mu\nu}$.

4. Основной результат. Всякое вполне неприводимое линейное представление группы $\mathfrak{U}$ эквивалентно одному из представлений полной серии или одному из спинорных представлений.

5. Идея доказательства. Пусть D_k — спинорное представление группы $\mathfrak{U}$ веса k ; $f_{-k}, f_{-k+1}, \dots, f_k$ — базис из весовых векторов этого представления; $c_{ji}^k(u)$ — матричный элемент оператора представления D_k в этом базисе.

Пусть, далее, X — совокупность всех бесконечно дифференцируемых функций $x(a)$, равных нулю вне компактного множества (своего для каждой функции); X образует кольцо, если в нем определить операции сложения и умножения на число обычным образом, а операцию умножения — как свертывание

$$x_1 \cdot x_2(a) = \int x_1(a_1) x_2(a_1^{-1}a) da_1. \quad (8)$$

Обозначим через X_j^k совокупность всех функций $x(a)$ из X , удовлетворяющих условию

$$\sqrt{2k+1} \int \overline{c_{jj}(u)} x(u^{-1}a) du = \sqrt{2k+1} \int c_{jj}(u) x(au) du = x(a). \quad (9)$$

IV. X_j^k есть коммутативное подкольцо кольца X .

Пусть $a \rightarrow T_a$ — представления группы $\mathfrak{U}$ в пространстве R . Обозначим через $\mathfrak{M}_j^k$ совокупность всех векторов ξ из R , удовлетворяющих условию

$$\sqrt{2k+1} \int c_{jj}^k(u) T_u \xi du = \xi. \quad (10)$$

V. $\mathfrak{M}_j^k$ есть подпространство в R , инвариантное относительно всех операторов $T_x = \int x(a) T_a da$, $x \in X_j^k$, и линейные комбинации векторов $\xi \in \mathfrak{M}_j^k$, отвечающих всевозможным k и j , образуют множество, плотное в R .

VI. Если представление $a \rightarrow T_a$ вполне неприводимо и $\mathfrak{M}_j^k \neq (0)$, то операторы T_x , $x \in X_j^k$, рассматриваемые как операторы в $\mathfrak{M}_j^k$, образуют вполне неприводимое множество.

В силу IV эти операторы образуют, кроме того, коммутативное множество, что возможно лишь тогда, когда $\mathfrak{M}_j^k$ одномерно, а операторы T_x , $x \in X_j^k$, в $\mathfrak{M}_j^k$ суть операторы умножения на число:

$$T_x \xi = \lambda(x) \xi \quad \text{при } \xi \in \mathfrak{M}_j^k, x \in X_j^k. \quad (11)$$

$\lambda(x)$ есть линейный мультипликативный функционал в X_j^k :

$$\lambda(c_1 x_1 + c_2 x_2) = c_1 \lambda(x_1) + c_2 \lambda(x_2), \quad \lambda(x_1 x_2) = \lambda(x_1) \lambda(x_2).$$

VII. Два вполне неприводимых представления $a \rightarrow T'_a$, $a \rightarrow T''_a$ группы $\mathfrak{U}$, для которых $\mathfrak{M}_j'^k \neq (0)$, $\mathfrak{M}_j''^k \neq (0)$ при фиксированных k , j , эквивалентны тогда и только тогда, когда соответствующие функционалы $\lambda(x)$ (отвечающие данным k и j) совпадают.

Оказывается, что всякий линейный мультипликативный функционал $\lambda(x)$ в кольце X_j^k совпадает с функционалом $\lambda(x)$, отвечающим представлению полной серии или спинорному представлению, чем и завершается доказательство основной теоремы п. 4.

Поступило
13 V 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ И. Гельфанд, М. Наймарк, J. of Physics, **10**, 93 (1946). ² И. М. Гельфанд, М. А. Наймарк, Изв. АН СССР, сер. матем., **11**, 411 (1947). ³ R. Godement, Trans. Am. Math. Soc., **73**, № 3, 496 (1952). ⁴ М. А. Наймарк, ДАН, **84**, № 5, 883 (1952).