

Н. Я. ЛЯЩЕНКО

ОБ ОДНОЙ ТЕОРЕМЕ РАЗДЕЛЕНИЯ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

(Представлено академиком Н. Н. Боголюбовым 29 V 1954)

Пусть дана система дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}\frac{dz_1}{dt} &= A_1(t) z_1 + L_{11}(t) z_1 + L_{12}(t) z_2, \\ \frac{dz_2}{dt} &= A_2(t) z_2 + L_{21}(t) z_1 + L_{22}(t) z_2,\end{aligned}\tag{1}$$

где z_1 — r -мерный, z_2 — $(n-r)$ -мерный векторы, а $A_1(t)$, $A_2(t)$, $L_{ij}(t)$ ($i, j = 1, 2$) — матрицы соответствующих порядков, определенные как функции переменного t на всей вещественной оси.

Предположим, что корни характеристического уравнения

$$\text{Det} \| pE - A_k(t) \| = 0, \quad k = 1, 2,\tag{2}$$

таковы, что

$$\begin{aligned}\text{Re } p_i(t) &\leq \gamma_1 < \gamma_2 \leq \text{Re } p_j(t), \\ i &= 1, 2, \dots, r; \quad j = r+1, r+2, \dots, n,\end{aligned}\tag{2'}$$

где γ_1, γ_2 — некоторые постоянные.

Кроме того предполагается, что $A_1(t)$ и $A_2(t)$ удовлетворяют условиям теоремы 2 (1) с $\gamma = \frac{\gamma_2 - \gamma_1}{2}$.

Обозначим через K_- и K_+ значение постоянной K из упомянутой теоремы с данным γ .

При выполнении этих условий имеет место следующая теорема:
Теорема. Если матрицы $L_{ij}(t)$ ($i, j = 1, 2$) непрерывны и для всех вещественных t удовлетворяют условию

$$|L_{ij}(t)| \leq L < \frac{\gamma}{9K_+K_-},\tag{3}$$

то всегда можно указать такие ограниченные и непрерывные матрицы $B_1(t)$ и $B_2(t)$, что замена переменных

$$\begin{aligned}z_1(t) &= \eta_1(t) + B_2(t) \eta_2(t), \\ z_2(t) &= B_1(t) \eta_1(t) + \eta_2(t)\end{aligned}\tag{4}$$

разделяет систему (1) на две независимые системы r -го и $(n-r)$ -го порядков:

$$\begin{aligned}\frac{d\eta_1}{dt} &= A_1(t) \eta_1 + L_{11}(t) \eta_1 + L_{12}(t) B_1(t) \eta_1, \\ \frac{d\eta_2}{dt} &= A_2(t) \eta_2 + L_{21}(t) B_2(t) \eta_2 + L_{22}(t) \eta_2.\end{aligned}\tag{5}$$

Доказательство. Ясно, прежде всего, что тривиальной заменой переменных можно придти к случаю, когда корни характеристиче-

ческого уравнения (2) удовлетворяют условию

$$\operatorname{Re} p_i(t) \leq -\gamma; \quad \operatorname{Re} p_j(t) \geq \gamma; \quad \gamma = \frac{\gamma_2 - \gamma_1}{2};$$

$$i = 1, 2, \dots, r; \quad j = r + 1, r + 2, \dots, n.$$

Очевидно, далее, что теорема будет доказана, коль скоро мы установим существование такой матрицы $B_1(t)$, что выражения

$$\begin{aligned} z_1(t) &= \gamma_1(t), \\ z_2(t) &= B_1(t) \gamma_1(t) \end{aligned} \quad (6)$$

удовлетворяют системе (1).

В самом деле, взяв тогда вместо $A_1(t)$ матрицу $A_2(t)$ и изменив направление роста t на обратное, мы установим существование такой матрицы $B_2(t)$, что выражения

$$\begin{aligned} z_1(t) &= B_2(t) \gamma_2(t), \\ z_2(t) &= \gamma_2(t) \end{aligned}$$

также удовлетворяют системе (1).

В силу линейности исходной системы ей будет удовлетворять и сумма (4).

Подставляя (6) в систему (1), для определения матрицы $B_1(t)$ получаем дифференциальное уравнение

$$\frac{dB_1}{dt} = A_2 B_1 - B_1 A_1 + L_{22} B_1 - B_1 L_{11} - B_1 L_{12} B_1 + L_{21} \quad (7)$$

или соответствующее ему интегральное уравнение

$$\begin{aligned} B_1(t) = - \int_t^\infty U_2(t, \tau) \{ L_{22}(\tau) B_1(\tau) - B_1(\tau) L_{11}(\tau) - \\ - B_1(\tau) L_{12}(\tau) B_1(\tau) + L_{21}(\tau) \} U_1^{-1}(t, \tau) d\tau, \end{aligned} \quad (8)$$

где $U_2(t, \tau)$, $U_1^{-1}(t, \tau)$ — матрицы, являющиеся решениями уравнений

$$\frac{dU_2(t, \tau)}{dt} = A_2(t) U_2(t, \tau); \quad U_2(t, \tau)|_{t=\tau} = E_2,$$

$$\frac{dU_1^{-1}(t, \tau)}{dt} = -U_1^{-1}(t, \tau) A_1(t); \quad U_1^{-1}(t, \tau)|_{t=\tau} = E_1$$

и, как таковые, удовлетворяющие оценке теоремы 2 (1).

Уравнение (8) решаем методом последовательных приближений, полагая

$$\begin{aligned} B_1^{(n)}(t) = - \int_t^\infty U_2(t, \tau) \{ L_{22} B_1^{(n-1)} - B_1^{(n-1)} L_{11} - B_1^{(n-1)} L_{12} B_1^{(n-1)} + L_{21} \} U_1^{-1}(t, \tau) d\tau, \\ B_1^{(0)}(t) = 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Если выполняется условие

$$\frac{2}{\gamma} K_+ K_- L < \frac{Q}{(1+Q)^2},$$

где Q — некоторая постоянная, то

$$|B_1^{(n)}(t)| < Q \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Поскольку члены ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} [B_1^{(n)}(t) - B_1^{(n-1)}(t)] \quad (10)$$

мажорируются, соответственно, членами геометрической прогрессии

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1} Q^n,$$

сходящейся, если $Q < 1/2$, что выполняется в силу (3), то (10), а следовательно, и $B_1^{(n)}(t)$ при $n \rightarrow \infty$ равномерно стремятся к непрерывной и ограниченной матрице $B_1(t)$.

Переходя к пределу в (9) при $n \rightarrow \infty$, видим, что матрица $B_1(t)$ удовлетворяет интегральному уравнению (8). Дифференцируя последнее по t , убеждаемся, что $B_1(t)$ удовлетворяет уравнению (7), и теорема доказана.

Применяя эту теорему к системам дифференциальных уравнений с медленно меняющимися коэффициентами, рассматривавшихся С. Ф. Фещенко⁽²⁾, можно уточнить его теорему 1, установив возможность точного, а не приближенного разделения системы при условиях (2¹), налагаемых на корни соответствующего характеристического уравнения.

В заключение автор пользуется случаем выразить искреннюю благодарность акад. Н. Н. Боголюбову за руководство работой.

Поступило
25 V 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ Н. Я. Лященко, ДАН, 96, № 2 (1954). ² С. Ф. Фещенко, Доповіді АН УРСР, № 3, 156 (1951).