

Б. М. ЛЕВИТАН

# О РАЗЛОЖЕНИИ ПО СОБСТВЕННЫМ ФУНКЦИЯМ УРАВНЕНИЯ

$$\Delta u + \{\lambda - q(x_1, x_2, \dots, x_n)\} u = 0$$

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 25 V 1954)

1. Обозначим через  $D$  конечную односвязную область  $n$ -мерного пространства Евклида и через  $B$  — границу  $D$ . Предположим, что функция  $q(x_1, x_2, \dots, x_n) = q(x)$  действительна и имеет в  $D$  непрерывные частные производные до  $(n-3)$ -го порядка включительно ( $n > 3$ )\*.

Рассмотрим задачу на собственные значения\*\*

$$\Delta u + \{\lambda - q(x_1, x_2, \dots, x_n)\} u = 0, \quad (1)$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_B = 0. \quad (2)$$

Так как функция  $q(x)$  ограничена, то, не нарушая общности рассуждений, можно предполагать, что спектр задачи (1)–(2) неотрицателен. Обозначим через  $\lambda_k = \mu_k^2$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) собственные значения задачи (1)–(2) и через  $\omega_k(x)$  — соответствующие ортонормированные собственные функции.

Имеют место следующие результаты:

Теорема 1. Обозначим через  $\varepsilon$  произвольное положительное число и через  $D_\varepsilon$  — множество точек области  $D$ , расстояние которых до границы  $B$  области  $D$  не меньше, чем  $\varepsilon$ . Существует константа  $C = C_\varepsilon$  такая, что если точка  $x \in D_\varepsilon$ , то для всех положительных  $a$  справедлива оценка

$$\sum_{a < \mu_k \leq a+1} \omega_k^2(x) < C a^{n-1}. \quad (3)$$

Теорема 2. Пусть  $D_\varepsilon$  и  $C_\varepsilon$  имеют то же значение, что и в предыдущей теореме. Пусть  $x, y \in D_\varepsilon$ . При  $\mu \rightarrow \infty$  справедлива следующая асимптотическая формула ( $r = |x - y|$ ):

$$\left| \sum_{\mu_k < \mu} \omega_k(x) \omega_k(y) - \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \frac{\mu^{n/2}}{r^{n/2}} J_{n/2}(\mu r) \right| < C_\varepsilon \mu^{n-1}. \quad (4)$$

В частности, если  $x = y$ , то из формулы (4) следует

$$\left| \sum_{\mu_k < \mu} \omega_k^2(x) - \frac{1}{\pi^{n/2} 2^n \Gamma(n/2 + 1)} \mu^n \right| < C_\varepsilon \mu^{n-1}. \quad (5)$$

\* Случай  $n = 2$  и  $n = 3$  рассмотрены нами в работе (2).

\*\* Вместо граничного условия (2) можно взять более общее условие

$$\left( \frac{\partial u}{\partial n} + hu \right) \Big|_B = 0,$$

где  $h$  — действительная функция.

2. Пусть  $f(y) \in L_2(D)$ ,  $x \in D_\varepsilon$ ,  $s \geq 0$ . Положим

$$c_k = \int_{(D)} f(y) \omega_k(y) dy,$$

$$R_s(x; \mu) = \frac{1}{\Gamma(s+1)} \sum_{\mu_k < \mu} \left(1 - \frac{\mu_k^2}{\mu^2}\right)^s c_k \omega_k(x),$$

$$R_s^*(x; \mu) = \int_{(D)} f(y) \theta_s^*(x, y; \mu) dy,$$

причем

$$\theta_s^*(x, y; \mu) = \frac{2^s}{(2\pi)^{n/2}} \frac{\mu^{n/2-s}}{r^{n/2+s}} J_{n/2+s}(\mu r), \quad r = |x - y|.$$

$R_s(x; \mu)$  есть среднее по Риссу порядка  $s$  разложения в ряд Фурье функции  $f(y)$  по собственным функциям оператора (1) — (2);  $R_s^*(x; \mu)$  есть среднее по Риссу порядка  $s$  разложения в обычный интеграл Фурье функции, равной  $f(y)$ , если  $y \in D$ , и равной нулю вне  $D$ .

Теорема 3. Пусть в окрестности точки  $x_0 \in D_\varepsilon$  функция  $f(y)$  ограничена. Пусть  $s = \frac{n-1}{2} = r$ . Тогда

$$\lim_{\mu \rightarrow \infty} \{R_r(x_0; \mu) - R_r^*(x_0; \mu)\} = 0. \quad (6)$$

Если функция  $f(y)$  в области  $D$  ограничена, то равенство (6) имеет место равномерно в  $D_\varepsilon$ .

Из теоремы 3 и одной известной теоремы С. Бохнера<sup>(3)</sup> следует, что в каждой внутренней точке непрерывности функции  $f(x)$  справедливо равенство

$$\lim_{\mu \rightarrow \infty} R_{r+\eta}(x; \mu) = f(x) \quad (\eta > 0). \quad (7)$$

Теорема 4. Пусть в области  $D$  существуют операторы

$$L^0 f(x) = f(x), \quad Lf(x) = \Delta f(x) - q(x)f(x), \quad L^2 f(x), \dots, L^\nu f(x),$$

$$\left(\nu \leq \varepsilon \left[\frac{n-1}{2}\right]\right)$$

и пусть функции  $L^\lambda f(x)$  ( $\lambda = 0, 1, \dots, \nu-1$ ) удовлетворяют граничному условию (2), а  $L^\nu f(x) \in L_2(D)$ . Тогда в каждой внутренней точке непрерывности функции  $f(x)$  справедливо равенство

$$\lim_{\mu \rightarrow \infty} R_{r-2\nu+\eta}(x; \mu) = f(x), \quad (8)$$

где  $\eta$  — произвольное положительное число.

В частности, если  $r = \frac{n-1}{2}$  чётно,  $r = 2j$  и  $\nu = j$ , то из равенства (8) следует, что в каждой точке непрерывности функции  $f(x)$  суммы по Риссу любого положительного порядка разложения в ряд Фурье по собственным функциям задачи (1) — (2) сходятся к значению функции.

3. Перечисленные нами выше результаты переносятся на случай бесконечного пространства. Пусть функция  $q(x)$  задана во всем пространстве\*. Обозначим через  $D_N$  последовательность областей, расширяющихся до всего пространства  $E_n$ , и через  $B_N$  — границы  $D_N$ .

\* Поведение функции  $q(x)$  на бесконечности не подвергается никаким ограничениям.

Рассмотрим задачи на собственные значения:

$$\Delta u + \{\lambda - q(x)\} u = 0, \quad (9)$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{B_N} = 0. \quad (10)$$

Обозначим через  $\lambda_1^{(N)}, \lambda_2^{(N)}, \dots, \lambda_k^{(N)}, \dots$  собственные значения задачи (9) — (10) и через  $\omega_k^{(N)}(x)$  — соответствующие собственные функции. Положим

$$\theta^{(N)}(x, y; \lambda) = \sum_{\lambda_k^{(N)} < \lambda} \omega_k(x) \omega_k(y).$$

Из методов, примененных нами для доказательства теорем 1 и 2, легко следует, что к функциям  $\theta^{(N)}(x, y; \lambda)$  применимы теоремы выбора Арцела и Хелли. Обозначим через  $\theta(x, y; \lambda)$  одну из предельных функций для последовательности  $\theta^{(N)}(x, y; \lambda)$ .

Справедливы следующие результаты:

Теорема 5. Для любого  $t > 0$

$$\int_{-\infty}^0 e^{V\sqrt{\lambda}t} |d_\lambda \theta(x, y; \lambda)| < \infty. \quad (11)$$

Теорема 6. Обозначим через  $F$  произвольную конечную область пространства  $E_n$ . Существует константа  $\bar{C} = C(F)$  такая, что если  $x, y \in F$ , то  $(\lambda \rightarrow +\infty)$

$$\left| \theta(x, y; \lambda) - \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \frac{(V\bar{\lambda})^{n/2}}{r^{n/2}} J_{n/2}(V\bar{\lambda}r) \right| < C\lambda^{n/2-1/2}.$$

Теоремы разложения 3 и 4 также переносятся на случай бесконечного пространства, независимо от того, какова природа спектра оператора. Для случая дискретного спектра с единственной предельной точкой на бесконечности теоремы разложения переносятся дословно. В общем случае вместо сумм следует использовать интегралы Стильтеса.

4. Перечисленные результаты обобщаются на случай произвольного эллиптического самосопряженного дифференциального оператора второго порядка:

$$L(u) + \lambda u = 0,$$

где

$$L(u) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right\} - q(x) u \quad (a_{ij} = a_{ji}) \quad (12)$$

и функции  $a_{ij}(x)$  имеют частные производные до порядка  $(n-1)$  включительно.

Рассмотрим задачу на собственные значения

$$L(u) + \lambda u = 0, \quad (13)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} \Big|_B = 0 \quad (\nu - \text{конормаль}). \quad (14)$$

Пусть спектр задачи (13) — (14) неотрицателен. Обозначим через  $\lambda_k = \mu_k^2$  собственные значения задачи (13) — (14) и через  $\omega_k(x)$  — соответствующие собственные функции.

Мы ограничимся формулировкой одного из полученных нами результатов.

**Теорема 7.** Пусть  $D_\varepsilon$  и  $C_\varepsilon$  имеют то же значение, что и в теореме 1. При  $\mu \rightarrow \infty$  справедлива следующая асимптотическая формула:

$$\left| \sum_{\mu_k < \mu} \omega_k^2(x) - \frac{1}{\pi^{n/2} \cdot 2^n \Gamma(n/2 + 1) \sqrt{a(x)}} \mu^n \right| < C_\varepsilon \mu^{n-1},$$

где

$$a(x) = |a_{ij}(x)|_{i,j=1}^n.$$

Теоремы 1, 3, 4 и 6 также переносятся на оператор (12).

Теорема (5) обобщается частично, а именно, оценка (10) получена нами лишь для малых  $t$ .

Поступило  
26 V 1954

#### ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- <sup>1</sup> Б. М. Левитан, ДАН, **90**, № 2, 133 (1953). <sup>2</sup> Б. М. Левитан, ДАН, **94**, № 2 (1954). <sup>3</sup> S. Bochner, Trans. Am. Math. Soc., **40**, 175 (1936).