

М. А. КРАСНОСЕЛЬСКИЙ

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ КРИТИЧЕСКИХ ЗНАЧЕНИЙ ЧЕТНЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ НА СФЕРЕ

(Представлено академиком П. С. Александровым 27 V 1954)

1. Л. А. Люстерник⁽¹⁾, изучая четные функционалы в гильбертовом пространстве, обнаружил замечательный факт: на каждой сфере такие функционалы имеют бесконечное число различных критических значений, если они слабо непрерывны, положительно всюду кроме нуля пространства и удовлетворяют некоторым менее существенным ограничениям. Эта теорема явилась обобщением того факта, что вполне непрерывные самосопряженные линейные операторы (например, интегральные с симметрическими ядрами) имеют счетное число линейно независимых собственных функций.

Теорема Л. А. Люстерника в дальнейшем обобщалась; некоторые предположения Л. А. Люстерника оказались лишними (работы В. И. Соболева, Э. С. Цитланда и др.).

Все доказательства теорем о существовании (при различных предположениях) на сфере бесконечного числа критических значений существенно использовали четность рассматриваемого функционала. Это свойство позволяло переходить к изучению функционала на проективных пространствах, полученных «склеиванием» симметричных относительно центра точек сферы. После перехода к рассмотрению функционалов на проективных пространствах оценка количества критических точек может быть проведена при помощи общей теории, созданной Л. А. Люстерником и Л. Г. Шнирельманом^(2,3). Естественно, что такой переход невозможен при исследовании функционалов, не обладающих свойством четности. В частности, таким методом не удастся решить задачу о том, есть ли у четных функционалов критические значения, устойчивые при малых не обязательно четных возмущениях. Оказывается, что на этот вопрос может быть дан положительный ответ при помощи соображений, являющихся развитием метода нашей статьи⁽⁴⁾.

Устойчивые критические значения четных функционалов мы определяем при помощи минимаксимальных соображений на специально конструируемом классе множеств. Эти критические значения, повидимому, могут отличаться от критических значений, определяемых Л. А. Люстерником.

2. Через T ниже обозначается единичный шар гильбертова пространства $\mathfrak{H}$; S — единичная сфера этого пространства. Функционал $F(\varphi)$ будем называть гладким, если он равномерно дифференцируем на T . Оператор градиента функционала $F(\varphi)$ будем обозначать через G . Равномерная дифференцируемость означает, что $[F(\varphi + h) - F(\varphi) - (G\varphi, h)] / \|h\|$ стремится к нулю при $\|h\| \rightarrow 0$ равномерно относительно $\varphi \in T$.

Всюду ниже через $F_0(\varphi)$ обозначается слабо непрерывный на T гладкий функционал, удовлетворяющий дополнительным требованиям:

он четен и положителен на S , $\Gamma_0\varphi \neq \theta$ в тех точках $\varphi \in T$, в которых $F(\varphi) > 0$.

Точку $\varphi \in S$ называют критической точкой функционала $F(\varphi)$ на сфере S , если вектор $\Gamma\varphi$ коллинеарен φ :

$$\Gamma\varphi = (\Gamma\varphi, \varphi)\varphi.$$

Значения функционала $F(\varphi)$ в критических точках называют критическими значениями функционала.

3. Через $\mathfrak{M}_k$ обозначим класс таких множеств $E \subset S$, каждое из которых получено нечетным непрерывным отображением k -мерной сферы в S . Пусть

$$c_k = \sup_{E \in \mathfrak{M}_k} \{ \min_{\varphi \in E} F_0(\varphi) \} \quad (k = 1, 2, \dots). \quad (1)$$

Теорема 1. Числа c_k положительны. Среди них есть бесконечное количество различных. Каждое из чисел c_k является критическим значением функционала $F_0(\varphi)$ на S .

Отметим, что критические числа Л. А. Люстерника определяются формулой (1), в которой supremum обычно распространен на более широкий класс множеств. Поэтому, вообще говоря, критические значения c_k будут меньше критических значений Л. А. Люстерника.

4. Через R_a , $0 < a < \sup_{\varphi \in S} F_0(\varphi)$, будем обозначать множество тех $\varphi \in S$, в которых $F_0(\varphi) > a$.

Теорема 2. В каждом R_a есть множества, нестягиваемые в R_a точку.

При доказательстве этой теоремы используются числа c_k . Они могли бы быть заменены критическими значениями, определяемыми Л. А. Люстерником, если бы получила положительное решение следующая задача, которую мы сформулируем при помощи понятия категории, принадлежащего Л. А. Люстернику и Л. Г. Шнирельману.

Пусть $\mathcal{C}$ — множество категории k проективного (конечномерного или бесконечномерного) пространства Π , полученного склеиванием симметричных относительно центра точек сферы S . Через E обозначим множество тех точек сферы S , которые являются прообразами точек из $\mathcal{C}$. Допустим, что E непрерывной деформацией в S стянуто в точку. Через E_1 обозначим множество тех точек, через которые проходили точки E при указанной деформации (E_1 — след деформации). Пусть $\mathcal{C}_1$ — образ множества E_1 в проективном пространстве Π .

Задача. Доказать, что категория $\mathcal{C}_1$ в Π больше категории $\mathcal{C}$ в Π .

Обозначим через $\mathfrak{N}_a$ непустой в силу теоремы 2 класс множеств, нестягиваемых в R_a в точку. Определим функцию $d(a)$ равенством

$$d(a) = \sup_{E \in \mathfrak{N}_a} \{ \inf_{\varphi \in E} F_0(\varphi) \} \quad (0 < a < \sup_{\varphi \in S} F_0(\varphi)).$$

Нам известны следующие свойства функции $d(a)$.

Теорема 3. Функция $d(a)$ принимает положительные значения, среди которых есть бесконечное множество различных. Каждое значение функции $d(a)$ является критическим значением функционала $F_0(\varphi)$ на S .

Было бы интересно исследовать, в каком соотношении находятся критические значения функционала $F_0(\varphi)$, существование которых вытекает из конструкции Л. А. Люстерника, числа c_k и значения функции $d(a)$ (которых, возможно, тоже только счетное число).

5. Нами исследован вопрос о существовании критических значений у возмущенных функционалов $F(\varphi)$ вида $F(\varphi) = F_0(\varphi) + G(\varphi)$, где

$G(\varphi)$ — гладкий функционал, малый в некотором смысле. Для характеристики малости функционала $G(\varphi)$ введем в рассмотрение его норму равенством:

$$\|G(\varphi)\| = \sup_{\varphi \in S} \|\Gamma_1 \varphi\| + \sup_{\varphi \in S} |G(\varphi)|,$$

где Γ_1 — оператор градиента функционала $G(\varphi)$.

Следует отметить, что для гладких слабо непрерывных функционалов

$$\sup_{\varphi \in S} \|\Gamma_1 \varphi\| = \sup_{\varphi \in T} \|\Gamma_1 \varphi\|, \quad \sup_{\varphi \in S} |G(\varphi)| = \sup_{\varphi \in T} |G(\varphi)|,$$

ибо для слабо непрерывных функционалов в бесконечномерных пространствах справедлив принцип максимума модуля: верхняя грань абсолютных значений слабо непрерывного функционала на границе ограниченного выпуклого множества равна верхней грани абсолютных значений функционала на границе этого выпуклого множества. Аналогично справедливы и принципы максимума, минимума и минимума модуля.

Теорема 4. Каждое критическое значение $d(a)$, $0 < a < \sup_{\varphi \in S} F_0(\varphi)$, функционала $F_0(\varphi)$ на S устойчиво, т. е. каждому $\varepsilon > 0$ отвечает такое $\delta > 0$, что функционал $F(\varphi) = F_0(\varphi) + G(\varphi)$ имеет на S по крайней мере одно критическое значение c , удовлетворяющее условию

$$|c - d(a)| < \varepsilon,$$

если справедливо неравенство

$$\|G(\varphi)\| < \delta,$$

где $G(\varphi)$ — гладкий слабо непрерывный функционал.

Из теоремы 4 непосредственно вытекает основной результат настоящей заметки.

Теорема 5. Каждому натуральному N отвечает такое $\delta > 0$, что каждый функционал вида

$$F(\varphi) = F_0(\varphi) + G(\varphi)$$

имеет на S не менее N различных критических значений, если гладкий слабо непрерывный функционал $G(\varphi)$ удовлетворяет неравенству

$$\|G(\varphi)\| < \delta.$$

6. Отметим, что утверждение теоремы 4 сохраняет силу и для случая конечномерного пространства $\mathfrak{H}$ (конечномерной сферы S). Однако о количестве критических значений функционала, являющихся значениями функции $d(a)$, ничего существенного сказать не удастся.

В конечномерном случае поведение функционалов внутри шара не играет никакой роли. Несущественна также положительность значений на сфере возмущаемого функционала.

Построения, использованные при доказательстве сформулированных выше предложений, переносятся на случай более общих чем гильбертово пространств: на пространства L^p ($p > 1$) и на более общие классы пространств с базисом.

Воронежский государственный университет

Поступило
1 III 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Л. А. Люстерник, Изв. АН СССР, сер. матем., 257 (1939). ² Л. А. Люстерник, Л. Г. Шнирельман, Топологические методы в вариационных задачах, М., 1930. ³ Л. А. Люстерник, Л. Г. Шнирельман, Усп. матем. наук, 2, 1 (17), 166 (1947). ⁴ М. А. Красносельский, Матем. сборн., 33 : 1, 199 (1953).