

И. А. КИПРИЯНОВ

О СХОДИМОСТИ И СУММИРОВАНИИ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫХ ПОЛИНОМОВ ДЛЯ ФУНКЦИЙ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ

(Представлено академиком В. И. Смирновым 21 V 1954)

В предыдущей заметке ⁽¹⁾ мы указали условия на метод суммирования и вид сходимости, при которых справедливо, что если метод суммирования суммирует в некотором смысле ряд Фурье функции $f(x, y)$, то он суммирует в том же смысле как ее тригонометрические интерполяционные полиномы для равноотстоящих узлов, так и более общие аппроксимирующие полиномы, содержащие интерполяционные как частный случай. В случае тригонометрических интерполяционных полиномов для равноотстоящих узлов предыдущие результаты могут быть дополнены (по поводу обозначений и определений см. ⁽¹⁾).

Пусть $f(x, y)$ — суммируемая всюду конечная функция периода 2π по x и по y . Положим

$$x_\mu = x_\mu^{(m)} = \frac{2\pi\mu}{2m+1}, \quad y_\nu = y_\nu^{(n)} = \frac{2\pi\nu}{2n+1} \quad (1)$$

($m, n = 0, 1, 2, \dots$; μ, ν — произвольные целые числа);

$$U_{m,n}(f; x, y) = \frac{4}{(2m+1)(2n+1)} \sum_{\mu=1}^{2m+1} \sum_{\nu=1}^{2n+1} f(x_\mu, y_\nu) D_m(x - x_\mu) D_n(y - y_\nu). \quad (2)$$

Пусть $(\mathfrak{M}_\tau)$ — некоторый метод суммирования (в смысле ⁽¹⁾). Запишем, как и в ⁽¹⁾,

$$V_{m,n}(f; x, y) = \sum_{\mu=0}^m \sum_{\nu=0}^n k_{\mu,\nu}^{(m,n)} U_{\mu,\nu}^{(m,n)}(f; x, y), \quad (3)$$

где $U_{\mu,\nu}^{(m,n)}(f; x, y)$ строится при помощи $U_{m,n}(f; x, y)$ по схеме, указанной в ⁽¹⁾.

Теорема 1. Пусть $M(u)$ и $\bar{M}(u)$ — функции класса Ω . Если метод суммирования $(\mathfrak{M}_\tau)$ таков, что для каждой функции $f(x, y) \in \bar{A}_{xy}^{(\bar{M})}$

$$\begin{aligned} \lim_{(m,n)_\tau \rightarrow \infty} mn \|f - \sigma_{m,n}(f)\|_M &= 0, \\ \lim_{(m,n)_\tau \rightarrow \infty} n \left\| \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial \sigma_{m,n}(f)}{\partial x} \right\|_M &= 0, \\ \lim_{(m,n)_\tau \rightarrow \infty} m \left\| \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial \sigma_{m,n}(f)}{\partial y} \right\|_M &= 0, \end{aligned} \quad (4)$$

то для каждой функции $f(x, y) \in \tilde{A}_{xy}^{(\overline{M})}$

$$\begin{aligned} \lim_{(m,n)_\tau \rightarrow \infty} mn \|f - V_{m,n}(f)\|_M &= 0, \\ \lim_{(m,n)_\tau \rightarrow \infty} n \left\| \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial V_{m,n}(f)}{\partial x} \right\|_M &= 0, \\ \lim_{(m,n)_\tau \rightarrow \infty} m \left\| \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial V_{m,n}(f)}{\partial y} \right\|_M &= 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Теорема 2. Пусть $\overline{M}(u)$ — функция класса Ω . Если метод суммирования (M_τ) таков, что для каждой функции $f(x, y) \in \tilde{A}_{xy}^{(\overline{M})}$

$$\begin{aligned} \lim_{(m,n)_\tau \rightarrow \infty} mn \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} |f - \sigma_{m,n}(f)| dx dy &= 0, \\ \lim_{(m,n)_\tau \rightarrow \infty} n \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial \sigma_{m,n}(f)}{\partial x} \right| dx dy &= 0, \\ \lim_{(m,n)_\tau \rightarrow \infty} m \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial \sigma_{m,n}(f)}{\partial y} \right| dx dy &= 0. \end{aligned} \quad (6)$$

то для каждой функции $f(x, y) \in \tilde{A}_{xy}^{(\overline{M})}$

$$\begin{aligned} \lim_{(m,n)_\tau \rightarrow \infty} mn \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} |f - V_{m,n}(f)| dx dy &= 0, \\ \lim_{(m,n)_\tau \rightarrow \infty} n \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial V_{m,n}(f)}{\partial x} \right| dx dy &= 0, \\ \lim_{(m,n)_\tau \rightarrow \infty} m \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial V_{m,n}(f)}{\partial y} \right| dx dy &= 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Если от суммирования перейти к обычной сходимости, то имеют место следующие теоремы.

Теорема 3. Пусть $M(u), \overline{M}(u)$ — функции класса Ω . Если для каждой $f(x, y) \in L^{\overline{M}}$

$$\lim_{(m,n)_\tau \rightarrow \infty} \|f - s_{m,n}(f)\|_M = 0, \quad (8)$$

то для каждой $f(x, y) \in \tilde{A}_{xy}^{(\overline{M})}$

$$\begin{aligned} \lim_{(m,n)_\tau \rightarrow \infty} mn \|f - U_{m,n}(f)\|_M &= 0, \\ \lim_{(m,n)_\tau \rightarrow \infty} n \left\| \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial U_{m,n}(f)}{\partial x} \right\|_M &= 0, \\ \lim_{(m,n)_\tau \rightarrow \infty} m \left\| \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial U_{m,n}(f)}{\partial y} \right\|_M &= 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Теорема 4. Пусть $\bar{M}(u)$ — функция класса Ω . Если для каждой $f(x, y) \in L^{\bar{M}}$

$$\lim_{(m,n)_{\tau} \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} |f - s_{m,n}(f)| dx dy = 0, \quad (10)$$

то для каждой функции $f(x, y) \in \tilde{A}_{xy}^{(\bar{M})}$

$$\begin{aligned} \lim_{(m,n)_{\tau} \rightarrow \infty} mn \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} |f - U_{m,n}(f)| dx dy &= 0, \\ \lim_{(m,n)_{\tau} \rightarrow \infty} n \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial U_{m,n}(f)}{\partial x} \right| dx dy &= 0, \\ \lim_{(m,n)_{\tau} \rightarrow \infty} m \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial U_{m,n}(f)}{\partial y} \right| dx dy &= 0. \end{aligned} \quad (11)$$

В заключение приношу глубокую благодарность С. М. Лозинскому за постановку задачи, рассмотренной в предыдущей ⁽¹⁾ и настоящей заметках.

Казанский государственный университет
имени В. И. Ульянова-Ленина

Поступило
12 IV 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ И. А. Киприянов, ДАН, 95, № 1 (1954).