

В. М. БОРОК

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ ТИПОВ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 31 V 1954)

Пусть дана система дифференциальных уравнений в частных производных, которая представима в матричном виде следующим образом*:

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = P\left(\frac{1}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial x}, t\right) u(x, t). \quad (1)$$

Здесь $u(x, t) = \{u_1(x, t), \dots, u_n(x, t)\}$ — искомая вектор-функция с n компонентами, зависящими от времени t и пространственной точки $x = (x_1, \dots, x_N)$. К уравнению (1) присоединяется начальное условие

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad (1a)$$

где $u_0(x)$ — заданная вектор-функция.

И. М. Гельфанд и Г. Е. Шилев в работе ⁽¹⁾, пользуясь введенным ими методом обобщенных функций и обобщенных преобразований Фурье, доказали теоремы существования и единственности задачи Коши (1) — (1a) в классе быстро растущих начальных данных. Понятия и результаты этой работы мы используем как основу для дальнейших исследований.

Истолковав уравнение (1) как уравнение относительно обобщенной вектор-функции, зависящей от t как от параметра и принадлежащей по x некоторому пространству $T(\Phi)$ и применив к (1) и (1a) преобразование Фурье, получим в пространстве $\tilde{T}(\Phi) = T(\tilde{\Phi})$ систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{dv(s, t)}{dt} = P(s, t) v(s, t) \quad (v(s, t) = \widetilde{u(x, t)}) \quad (2)$$

с начальным условием

$$v(s, 0) = v_0(s) = \widetilde{u_0(x)}. \quad (2a)$$

Пусть $Q(s, t_0, t)$ — матрица нормальной фундаментальной системы решений системы (2). Тогда, если элементы матрицы $Q(s, 0, t)$ при любом $t \geq 0$ являются мультипликаторами в пространстве Ψ основных функций $\psi(s)$, то система (2) имеет решение

$$v(s, t) = Q(s, 0, t) v_0(s) \quad (3)$$

при любой начальной обобщенной вектор-функции $v_0(s) \in T(\Psi)$, причем это решение непрерывно зависит от функции $v_0(s)$ в смысле непрерывности $T(\Psi)$ (см. ⁽¹⁾).

Нашей целью является применение к (3) обратного преобразования Фурье** и исследование получаемого таким образом решения.

* Здесь и в дальнейшем терминология и обозначения те же, что и в ⁽¹⁾.

** В дальнейшем мы будем обозначать обратное преобразование Фурье знаком $\sim$.

1. Определение. Обобщенная функция T_* называется свертывателем в основном пространстве Φ , если для любой функции $\varphi(x) \in \Phi$

$$[T_*, \varphi(x+h)] = g(h) \in \Phi.$$

Теорема. 1. Если обобщенная функция T является мультипликатором в пространстве Φ основных функций, то ее (обратное) преобразование Фурье $\tilde{T}$ является свертывателем в пространстве $\tilde{\Phi}$.

Определение. Пусть обобщенные функции T_{1*} и T_{2*} принадлежат $T(\Phi)$ и T_{1*} является свертывателем в пространстве Φ . Тогда можно определить свертку $T_{1*}T_{2*}$ обобщенных функций T_1 и T_2 : для любой функции $\varphi(x) \in \Phi$

$$(T_{1*}T_{2*}, \varphi) = [T_{2*}, (T_{1*}', \varphi(x+h))] *.$$

Имеет место формула

$$\widetilde{T_1 \cdot T_2} = \tilde{T}_1 * \tilde{T}_2 \quad **, \quad (4)$$

которую нужно понимать следующим образом: если имеет смысл левая часть (4), то имеет смысл и правая часть (4), и они равны.

2. Если элементы матрицы $Q(s, 0, t)$ являются мультипликаторами в пространстве Ψ основных функций $\psi(s)$, а начальная функция такова, что $\varphi_0(s) \in T(\Psi)$, то можно воспользоваться формулой (4), и мы получим следующую общую формулу для решения задачи Коши (1) — (1a):

$$u(x, t) = \widetilde{Q(s, 0, t)} * u_0(x). \quad (5)$$

Решение $u(x, t)$ есть, вообще говоря, обобщенная функция. Однако в ряде случаев можно доказать, что решение задачи Коши (1) — (1a) является обычной функцией ⁽²⁾.

Пусть $\widetilde{Q(s, 0, t)}$ есть обычная функция, определяющая главный функционал, и

$$\int_{-\infty}^{\infty} \widetilde{Q}(x - \xi, 0, t) u_0(\xi) d\xi$$

абсолютно сходится и, следовательно, дает некоторую обычную функцию от x . Тогда решение

$$u(x, t) = \widetilde{Q}(x, 0, t) * u_0(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \widetilde{Q}(x - \xi, 0, t) u_0(\xi) d\xi$$

является обычной функцией. Это имеет место, например, в случае параболических систем. Определение параболической системы дано впервые И. Г. Петровским ⁽³⁾. Мы предпочитаем дать несколько измененное определение, именно: система (1) называется параболической, если элементы $Q_{ij}(s, t_0, t)$ ($s = \sigma + i\tau$) матрицы $Q(s, t_0, t)$ удовлетворяют условию

$$|Q_{ij}(\sigma, t_0, t)| \leq C_1 e^{-C_2 |\sigma| p_0}, \quad (6)$$

где p_0 — приведенный порядок системы (1) ⁽¹⁾, C_1 и C_2 — положительные числа.

* Если T_1 — матрица, знак ' сверху означает переход к транспонированной матрице.

** Впервые аналогичная формула для функционалов была доказана Л. Шварцем ⁽⁵⁾ для случая пространства $T(s)$, причем значительно более сложным путем.

Как показано у И. Г. Петровского, условие (6) выполняется для всех систем, параболических по И. Г. Петровскому.

3. В дальнейшем мы исследуем формулу (5) для случая гиперболических систем.

Определение. Система (1) называется гиперболической, если элементы матрицы $Q(s, t_0, t)$ удовлетворяют условиям

$$|Q_{ij}(s, t_0, t)| \leq C_1 e^{C|s|}, \quad |Q_{ij}(\sigma, t_0, t)| \leq C_2(1 + |\sigma| r) \quad (s = \sigma + i\tau),$$

где r, C, C_1, C_2 — постоянные положительные числа, зависящие от выбора момента времени t .

Теорема 2. Для того чтобы система (1) была гиперболической, необходимо и достаточно, чтобы для любой достаточно гладкой начальной функции $u_0(x)$ задача Коши (1) — (1а) имела решение и из сходимости к нулю решений задачи Коши (и их производных до некоторого порядка) в начальный момент равномерно на любом компакте следовала равномерная сходимость к нулю на любом компакте указанных решений в любой последующий момент времени*.

4. Определение. Система

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = P\left(\frac{1}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial x}\right) u(x, t),$$

называется гиперболической системой нормального типа, если матрица $P(s)$ есть матрица простой структуры (т. е. ее минимальный многочлен имеет простые корни) (4) и характеристические корни λ_k этой матрицы имеют вид

$$\lambda_k = ia_k R + b \quad (k = 1, 2, \dots, n),$$

где a_k — любые действительные числа; b — любое комплексное число;

$R = \sqrt{\sum_{j=1}^N y_j^2 - c^2}$; $y_j = 2\pi s_j + ia_j$ ($\alpha = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N\}$); α_j, c — произвольные постоянные.

Для гиперболических систем нормального типа формула (5), дающая решение задачи Коши, может быть записана в явном виде по следующему правилу.

Строится интерполяционный многочлен $q(\lambda) = \sum_{m=0}^{n-1} \lambda^m a_m(s, t)$ (4) для построения матрицы $Q(s, t_0, t) = e^{P(s)(t-t_0)} = q[P(s)(t-t_0)]$. Имеет место следующее утверждение: в интерполяционном многочлене $q(\lambda)$ коэффициенты при λ^m ($m = 0, \dots, n-1$) — линейные комбинации выражений

$$\int_0^t \dots \int_0^t \frac{\sin a_k R t_1}{R} dt_1 \dots dt_p \quad (p \geq 1) \quad \text{и} \quad \frac{\partial^v}{\partial t^v} \left(\frac{\sin a_k R t}{R} \right) \quad (v \geq 0) \quad (k = 1, \dots, n).$$

Воспользовавшись формулой (5), получим

$$u(x, t) = \widetilde{Q(s, 0, t)} * u_0(x) = \widetilde{q(P(s)t)} * u_0(x),$$

и, так как элементами матрицы $P(s)$ являются полиномы по переменным s_j ($j = 1, \dots, N$), которые при преобразовании Фурье переходят

* Л. Гардинг (6) получил аналогичное условие для одного уравнения.

в производные соответствующих порядков по соответствующим переменным, то для нахождения решения $u(x, t)$ мы должны знать лишь свертку $\frac{\sin a R t}{R} * u_0(x)$, которая в N -мерном пространстве имеет вид: при N четном:

$$\frac{a}{(N-1)!} \frac{\partial^{N-1}}{\partial t^{N-1}} \int_0^t (t^2 - y^2)^{\frac{N-2}{2}} y G(x, y) dy,$$

где

$$G(x, y) = \frac{2\Gamma\left(\frac{N+1}{2}\right)}{V\pi\Gamma\left(\frac{N}{2}\right)} \int_0^y \frac{z^{N-1}}{V y^2 - z^2} \operatorname{ch}(ac \sqrt{y^2 - z^2}) M_z(u_0(x)) dz;$$

при N нечетном:

$$\frac{a}{(N-1)!} \frac{\partial^N}{\partial t^N} \int_0^y (t^2 - y^2)^{\frac{N-1}{2}} y G(x, y) dy,$$

где

$$G(x, y) = \frac{1}{y^N} \int_0^y z^{N-1} J_0(iac \sqrt{y^2 - z^2}) M_z(u_0(x)) dz.$$

В обоих случаях

$$M_z(u_0(x)) = \frac{2(V\pi)^N}{\Gamma\left(\frac{N}{2}\right)} \int \dots \int_{\Omega_N} u_0(x + a\beta z) e^{-az(\alpha, \beta)} d\Omega_N.$$

Здесь J_0 — функция Бесселя нулевого порядка; Ω_N — единичная сфера в N -мерном пространстве.

В частности, к нормальному типу принадлежат многие известные уравнения и системы математической физики: волновое и телеграфное уравнения, системы уравнений Максвелла, Дирака и др. Указанный метод для всех этих типов уравнений дает возможность единообразного построения решения задачи Коши.

Автор пользуется случаем принести глубокую благодарность проф. Г. Е. Шилову за руководство.

Киевский государственный университет
им. Т. Г. Шевченко

Поступило
28 IV 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилов, Усп. мат. наук, 8, в. 6 (1953). ² А. Г. Костюченко, Г. Е. Шилов, Усп. матем. наук, 9, в. 3 (1954). ³ И. Г. Петровский, Бюлл. МГУ, А, 1, в. 7, 1938. ⁴ Ф. Р. Гантмахер, Теория матриц, 1953. ⁵ L. Schwartz, Théorie des distributions, 2, 1951. ⁶ L. Garding, Acta mathematica, 85 : 1—2 (1951).