

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

А. И. КОШЕЛЕВ

**СУЩЕСТВОВАНИЕ ОБОБЩЕННОГО РЕШЕНИЯ
УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ КРУЧЕНИЯ**

(Представлено академиком В. И. Смирновым 5 VII 1954)

Пусть Ω — плоская область поперечного сечения стержня, ограниченная односвязным, трижды непрерывно дифференцируемым контуром Γ .

Рассмотрим дифференциальное уравнение упруго-пластического кручения ⁽¹⁾

$$P(u) = \frac{\partial}{\partial x} \left[f(T^2) \frac{\partial u}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[f(T^2) \frac{\partial u}{\partial y} \right] + \omega = 0, \quad (1)$$

где $T^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2$ и ω — постоянное число.

Положим, что заданная функция $f(T^2)$ представима в виде

$$f(T^2) = f_0 + \varphi(T^2),$$

где f_0 — постоянное положительное число.

Относительно функций $\varphi(t)$ сделаем следующие предположения:

1) $\varphi(t)$ не убывает, трижды непрерывно дифференцируема и при $t \geq 0$ выполняется неравенство

$$\varphi(t) \geq bt^r, \quad (2)$$

где $b > 0$ и $r > 0$;

2) на бесконечности $\varphi(t)$ ведет себя как полином.

При этих условиях уравнение (1) будет уравнением эллиптического типа. Действительно, (1) можно записать в виде

$$A \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \\ + C \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \omega = 0,$$

где

$$A = 2f' \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + f, \quad B = 2f' \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y}, \quad C = 2f' \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + f.$$

Отсюда

$$AC - B^2 = 2ff'T^2 + f^2 \geq f_0^2 > 0.$$

Поставим следующую задачу. Найти в области Ω обобщенное решение ⁽²⁾ уравнения (1), удовлетворяющее граничному условию

$$u|_{\Gamma} = 0. \quad (3)$$

Запишем задачу (1) — (3) в виде функционального уравнения

$$P(u) = 0, \quad (4)$$

порожденного эллиптическим дифференциальным уравнением (1). В качестве пространства определения оператора возьмем множество функций пространства С. Л. Соболева $W_p^{(2)}(\Omega)$ ($p > 2$) ⁽³⁾, обращающихся в нуль на контуре Γ . Пространством значений оператора будет тогда L_p .

Рассмотрим сначала вспомогательное уравнение

$$P_\lambda(u) = 0, \quad (5)$$

порожденное оператором

$$P_\lambda(u) = \frac{\partial}{\partial x} \left[(f_0 + \lambda \varphi) \frac{\partial u}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[(f_0 + \lambda \varphi) \frac{\partial u}{\partial y} \right] + \omega,$$

где λ — численный параметр.

При $\lambda = 0$ уравнение (5) эквивалентно линейной задаче Дирихле

$$f_0 \Delta u + \omega = 0, \quad u|_\Gamma = 0, \quad (6)$$

а при $\lambda = 1$ — исходной краевой задаче.

Докажем, что при достаточно малом λ задача (5) имеет обобщенное решение. Для этого воспользуемся условиями сходимости метода Ньютона, полученными Л. В. Канторовичем ⁽⁴⁾.

В качестве начального приближения u_0 возьмем функцию, удовлетворяющую равенствам (6). Тогда невязку уравнения (5) можно будет оценить по норме следующим образом:

$$\|P_\lambda(u_0)\|_{L_p} \leq |\lambda| C,$$

где C — постоянная, не зависящая от λ .

Первый дифференциал Фреше оператора (5) имеет обратный ограниченный оператор по теореме из работы ⁽²⁾, а второй дифференциал будет ограничен в любой конечной сфере пространства $W_p^{(2)}$ ($p > 2$). Отсюда и из малости λ следует высказанное предложение.

Рассмотрим теперь оператор $P(u, \lambda)$, переводящий пространство X типа B в пространство Y типа B и зависящий от численного параметра λ ($0 \leq \lambda \leq 1$).

Лемма. Пусть уравнение

$$P(u, \lambda) = 0 \quad (7)$$

имеет решение при $\lambda = 0$ и пусть кроме этого выполняются следующие условия:

1) при всех λ ($0 \leq \lambda \leq 1$) возможные решения уравнения (7) и λ ограничены по норме

$$\|u_\lambda\|_X \leq C, \quad (*)$$

где C не зависит от λ ;

2) в сфере (*) второй дифференциал Фреше и оператор, обратный первому дифференциалу Фреше, ограничены по норме постоянными, не зависящими от λ :

$$\|P''\| \leq K, \quad \|(P')^{-1}\| \leq B;$$

3) при любых $\lambda_1, \lambda_2 \in [0, 1]$ и u , лежащих в сфере (*), выполняется неравенство

$$\|P(u, \lambda_1) - P(u, \lambda_2)\|_Y \leq M|\lambda_1 - \lambda_2|,$$

где M не зависит от λ_1, λ_2 .

Тогда уравнение (7) имеет решение при $\lambda = 1$.

Доказательство. Допустим, мы доказали, что при $\lambda = \lambda_0$ наше уравнение имеет решение u_0 . Докажем, что оно будет иметь решение и при $\lambda = \lambda_0 + \varepsilon$, где ε — конечное число, не зависящее от λ_0 .

Действительно, невязка уравнения при $\lambda = \lambda_0 + \varepsilon$ и $u = u_0$ оценивается так:

$$\|P(u_0, \lambda_0 + \varepsilon)\|_Y = \|P(u_0, \lambda_0) - P(u_0, \lambda_0 + \varepsilon)\|_Y \leq M|\varepsilon|.$$

Отсюда и из цитированной теоремы Л. В. Канторовича (4) вытекает, что при

$$|\varepsilon| \leq \frac{1}{2MKB}$$

решение существует и при $\lambda = \lambda_0 + \varepsilon \in [0, 1]$.

Остается заметить, что поскольку постоянные M, K и B не зависят от λ_0 , то, начав с точки $\lambda = 0$, мы при помощи конечного числа шагов достигнем точки $\lambda = 1$.

Проверив выполнимость условий леммы для уравнения (5), мы и докажем существование решения задачи (1) — (3). Условия 2 и 3 леммы проверить нетрудно. Для проверки условия 1 леммы покажем прежде всего, что модуль функции u , удовлетворяющей равенству (5), может быть априорно оценен независимо от λ . На основании вышесказанного достаточно получить оценку для λ , большего некоторого достаточно малого числа λ_0 . Фиксируем это λ_0 и будем считать, что $\lambda \geq \lambda_0$.

Умножим обе части дифференциального уравнения равенства (5) на u и проинтегрируем по частям. Используя граничное условие (3), получим равенство

$$\iint_{\Omega} [f_0 + \lambda \varphi(T^2)] \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] d\Omega = \omega \iint_{\Omega} u d\Omega \quad (\lambda \geq \lambda_0).$$

Отсюда и из неравенства (2) вытекает, что

$$\iint_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right]^{r+1} d\Omega \leq \frac{|\omega|}{\lambda_0 b} |\Omega| \|u\|_C^4 \quad (r > 0).$$

Пользуясь теоремой вложения С. Л. Соболева (3), находим, что

$$\|u\|_C^{2(r+1)} \leq N_1 \|u\|_C,$$

или

$$\|u\|_C \leq N_2,$$

где N_1 и N_2 зависят исключительно от данных задачи.

Применив теперь известную теорему С. Н. Бернштейна (5) или результаты Лерэя и Шаулера (6), мы получим априорные оценки для производных первых двух порядков, что и дает нам неравенство (*).

Замечание. Использованный при доказательстве метод Ньютона дает при фактическом вычислении более быструю сходимость, чем

обычный метод последовательных приближений. В этом можно убедиться на примере стержня круглого сечения, для которого уравнение кручения в полярных координатах имеет вид

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left[f \left(\frac{du}{dr} \right) r \frac{du}{dr} \right] + \omega = 0.$$

Проинтегрировав его один раз, мы получим для определения du/dr вещественное уравнение

$$f \left(\frac{du}{dr} \right) \frac{du}{dr} = - \frac{\omega r}{2}.$$

Применение же метода Ньютона к вещественному уравнению, как широко известно, дает весьма быструю сходимость.

Ленинградский текстильный институт
им. С. М. Кирова

Поступило
29 VI 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ Л. М. Качанов, Механика пластических сред, 1948. ² А. И. Кошелев, ДАН, 91, № 6 (1953). ³ С. Л. Соболев, Некоторые применения функционального анализа в математической физике, 1950. ⁴ Л. В. Канторович, Усп. матем. наук, 3, в. 6 (1948). ⁵ С. Н. Бернштейн, Усп. матем. наук, 8 (1941). ⁶ С. Н. Бернштейн, И. Г. Петровский, Усп. матем. наук, 8 (1941).