

А. А. КОСТЮКОВ

СОПРОТИВЛЕНИЕ ТЕЛ В ЖИДКОСТИ ПРИ ИХ ДВИЖЕНИИ ВБЛИЗИ ВЕРТИКАЛЬНОЙ СТЕНКИ

(Представлено академиком А. И. Некрасовым 27 IX 1954)

Приводится решение задачи об определении сил сопротивления, действующих на тело, при его движении под свободной поверхностью идеальной жидкости конечной и безграничной глубины вблизи вертикальной стенки.

§ 1. Оси координат x и y располагаем на свободной поверхности жидкости в состоянии ее покоя, а ось z направляем вверх. Систему координат считаем неизменно связанной с телом, движущимся равномерно со скоростью v в направлении оси x (параллельно стенке). Плоскость xz проведем через центр тяжести c объема тела. Пользуемся обычными допущениями теории волн малой амплитуды. Обозначим через h глубину жидкости, а через b — расстояние от точки c до вертикальной стенки. Пользуясь выражением М. Д. Хаскина (^{1,2}) для потенциала источника, расположенного в точке (ξ, η, ζ) жидкости глубины h , и применяя метод зеркального изображения, получим потенциал скоростей потока, вызванного телом при его движении у вертикальной стенки.

Вычисление сил, действующих на тело, может быть произведено на основании общей формулы для гидродинамических сил воздействия жидкости на тело (²).

§ 2. Для волнового сопротивления R тела получаем выражение:

$$R = -\frac{2\rho v^2}{\pi} \int_{\theta_0}^{1/2\pi} (I^2 + J^2) \frac{\text{th } \lambda_0 h}{\text{ch}^2 \lambda_0 h \cos^2 \theta - v h} \frac{d\theta}{\cos \theta}. \quad (1)$$

Здесь

$$I \Big\} = \int_S q(\xi, \eta, \zeta) \text{ch } \lambda_0 (\zeta + h) \begin{Bmatrix} \cos(\lambda_0 \xi \cos \theta) \\ \sin(\lambda_0 \xi \cos \theta) \end{Bmatrix} \cos[\lambda_0 (b - \eta) \sin \theta] dS; \quad (2)$$

S — поверхность тела; $q(\xi, \eta, \zeta)$ — плотность источников, непрерывно распределенных по поверхности S ; $v = g/v^2$; g — ускорение силы тяжести; ρ — массовая плотность жидкости; $\lambda_0 = \frac{v}{\cos^2 \theta} \text{th } \lambda_0 h$; $\theta_0 = 0$ при $v < \sqrt{gh}$; $\theta_0 = \arccos \sqrt{v h}$ при $v > \sqrt{gh}$.

Если представить R в виде

$$R = R_h + \Delta R, \quad (3)$$

где R_h — волновое сопротивление тела, плавающего на мелководье (при отсутствии стенки), ΔR — добавочное волновое сопротивление, вызываемое наличием вертикальной стенки, то найдем:

$$R_h = -\frac{2\rho v^2}{\pi} \int_{\theta_0}^{1/2\pi} [I_1^2 + I_2^2 + I_3^2 + I_4^2] \frac{\text{th } \lambda_0 h}{\text{ch}^2 \lambda_0 h \cos^2 \theta - v h} \frac{d\theta}{\cos \theta}, \quad (4)$$

$$\Delta R = -\frac{\rho v^2}{\pi} \int_{\theta_0}^{1/2\pi} [I_1^2 + I_2^2 - I_3^2 - I_4^2] \cos(2b\lambda_0 \sin \theta) + \\ + 2(I_1 I_3 + I_2 I_4) \sin(2b\lambda_0 \sin \theta) \left] \frac{\operatorname{th} \lambda_0 h}{\operatorname{ch}^2 \lambda_0 h \cos^2 \theta - \nu h} \frac{d\theta}{\cos \theta}, \quad (5)$$

$$\left. \begin{matrix} I_1 \\ I_2 \end{matrix} \right\} = \int_S q(\xi, \eta, \zeta) \operatorname{ch} \lambda_0 (\zeta + h) \left\{ \begin{matrix} \cos(\lambda_0 \xi \cos \theta) \\ \sin(\lambda_0 \xi \cos \theta) \end{matrix} \right\} \cos(\lambda_0 \eta \sin \theta) dS, \quad (6)$$

$$\left. \begin{matrix} I_3 \\ I_4 \end{matrix} \right\} = \int_S q(\xi, \eta, \zeta) \operatorname{ch} \lambda_0 (\zeta + h) \left\{ \begin{matrix} \cos(\lambda_0 \xi \cos \theta) \\ \sin(\lambda_0 \xi \cos \theta) \end{matrix} \right\} \sin(\lambda_0 \eta \sin \theta) dS. \quad (7)$$

При $b \rightarrow \infty$ $\Delta R \rightarrow 0$. Для тел, симметричных относительно плоскости xz (судов), $I_3 = I_4 = 0$ и формула для R принимает вид:

$$R = -\frac{2\rho v^2}{\pi} \int_{\theta_0}^{1/2\pi} (I_1^2 + I_2^2) \cos^2(b\lambda_0 \sin \theta) \frac{\operatorname{th} \lambda_0 h}{\operatorname{ch}^2 \lambda_0 h \cos^2 \theta - \nu h} \frac{d\theta}{\cos \theta}, \quad (8)$$

т. е.

$$R < 2R_h.$$

Приведенные формулы позволяют получить как частный случай волновое сопротивление «тонкого» судна, т. е. судна, поверхность которого весьма мало отходит от его диаметральной плоскости. Для этого необходимо положить: $\cos(\lambda_0 \eta \sin \theta) \approx 1$, $q = -v \partial f / \partial \xi$, где $\eta = \pm f(\xi, \zeta)$ — уравнение подводной поверхности судна. (Об определении $q(\xi, \eta, \zeta)$ для тела произвольной формы см. (3, 4).) При $b \rightarrow 0$ волновое сопротивление «тонкого» судна $R \rightarrow 2R_h$.

Волновое сопротивление тела в жидкости бесконечной глубины найдется непосредственно из полученных формул, если в них устремить $h \rightarrow \infty$.

§ 3. Вычислим силы сопротивления, испытываемые изолированным источником и диполем, расположенными в точке (ξ, η, ζ) под поверхностью жидкости вблизи вертикальной стенки.

Принимая за b расстояние от источника (диполя) до стенки, находим (2):

волновое сопротивление источника:

$$R = -\frac{2\rho Q^2 v^2}{\pi} \int_{\theta_0}^{1/2\pi} \operatorname{ch}^2 \lambda_0 (\zeta + h) \cos^2(b\lambda_0 \sin \theta) \frac{\operatorname{th} \lambda_0 h}{\operatorname{ch}^2 \lambda_0 h \cos^2 \theta - \nu h} \frac{d\theta}{\cos \theta} \quad (9)$$

и диполя:

$$R = -\frac{2\rho m^2 v^4}{\pi} \int_{\theta_0}^{1/2\pi} \operatorname{ch}^2 \lambda_0 (\zeta + h) \cos^2(b\lambda_0 \sin \theta) \frac{\operatorname{th}^3 \lambda_0 h}{\operatorname{ch}^2 \lambda_0 h \cos^2 \theta - \nu h} \frac{d\theta}{\cos^3 \theta}, \quad (10)$$

где Q — интенсивность источника, m — момент диполя в направлении оси x .

Формула (9) может служить приближенным выражением для волнового сопротивления гребного винта, работающего под свободной поверхностью жидкости вблизи вертикальной стенки. При этом под Q следует понимать интенсивность стока, расположенного в центре гребного винта, равную суммарной интенсивности стоков, распределенных по диску винта.

Если в (10) подставить вместо m выражение, связывающее m с радиусом сферы a , то получим формулу для волнового сопротивле-

ния шара. Приближенно можно найти a из условия равенства нулю функции тока ψ для случая движения сферы в безграничной среде. Тогда $m = 2\pi\nu a^3$.

Определим силу бокового сопротивления R_y , действующую на источник (положительное направление R_y считаем от источника к стенке):

$$R_y = \frac{\rho Q^2}{16\pi b^2} \left\{ 1 + \frac{1}{\left[1 + \left(\frac{\zeta + h}{b}\right)^2\right]^{3/2}} + M(h, b, \zeta) + N(h, b, \zeta, \nu) \right\}, \quad (11)$$

где

$$M = -\frac{16b^2}{\pi} \int_0^{1/2\pi} d\theta \int_0^\infty \frac{e^{-\lambda h} \operatorname{ch}^2 \lambda (\zeta + h)}{\operatorname{ch} \lambda h} \sin(2b\lambda \sin \theta) \sin \theta \lambda d\lambda, \quad (12)$$

$$N = \frac{16\nu b^2}{\pi} \int_0^{1/2\pi} d\theta \nu. p. \int_0^\infty \frac{e^{-\lambda h} (1 + \operatorname{th} \lambda h) \operatorname{ch}^2 \lambda (\zeta + h)}{(\nu \operatorname{th} \lambda h - \lambda \cos^2 \theta) \operatorname{ch} \lambda h} \sin(2b\lambda \sin \theta) \sin \theta \lambda d\lambda. \quad (13)$$

Функцию M можно представить в виде бесконечного сходящегося ряда:

$$M = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left\{ \frac{1}{\left[1 + \left(\frac{kh}{b}\right)^2\right]^{3/2}} + \frac{1}{\left[1 + \left(\frac{(k-1)h - \zeta}{b}\right)^2\right]^{3/2}} + \frac{1}{\left[1 + \left(\frac{(k+1)h + \zeta}{b}\right)^2\right]^{3/2}} \right\}, \quad (14)$$

которым удобно пользоваться для вычисления M при $h/b > 1$.

Функцию N можно также представить в форме ряда, члены которого будут содержать интегралы вида:

$$\nu. p. \int_0^\infty f(\lambda, \theta) e^{i\lambda u} d\lambda = \pi i R + \int_0(L)^\infty f(\lambda, \theta) e^{i\lambda u} d\lambda, \quad (15)$$

где

$$f(\lambda, \theta) = \frac{(1 + \operatorname{th} \lambda h) \lambda}{\nu \operatorname{th} \lambda h - \lambda \cos^2 \theta}, \quad (16)$$

$u = 2b \sin \theta + ia$, $a > 0$; R — вычет функции при обходе особой точки $\lambda_0(\theta)$ сверху; L — путь, соединяющий точки $\lambda = 0$ и $\lambda = \infty$ и обходящий λ_0 с верхней стороны.

Тогда для первого слагаемого N находим выражение:

$$N_1 = -8 \sqrt{\nu b^2} \int_\gamma \frac{\operatorname{ch}^2 \lambda (\zeta + h)}{\sqrt{\operatorname{th} \lambda h} \operatorname{ch}^2 \lambda h} \cos(2b \sqrt{\lambda^2 - \nu \operatorname{th} \lambda h}) \sqrt{\lambda} d\lambda. \quad (17)$$

Здесь γ равно корню уравнения $\gamma = \nu \operatorname{th} \gamma h$ при $\nu < \sqrt{gh}$ и $g = 0$ при $\nu > \sqrt{gh}$.

Для второго слагаемого N получим асимптотическое разложение, справедливое при больших значениях b :

$$N_2 \approx \frac{\nu}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} R_e \int_0^{1/2\pi} (-1)^n \frac{f^{(n-1)}(0, \theta) \sin \theta}{i^{n-1} 2^{n-3} b^{n-2}} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left\{ \frac{2}{\left[\sin \theta + i \frac{kh}{b}\right]^n} + \frac{1}{\left[\sin \theta + i \frac{(k-1)h - \zeta}{b}\right]^n} + \frac{1}{\left[\sin \theta + i \frac{(k+1)h + \zeta}{b}\right]^n} \right\} d\theta, \quad (18)$$

где $f^{(0)}(0, \theta) = \frac{1}{\nu h - \cos^2 \theta}$, $f'(0, \theta) = \frac{h}{\nu h - \cos^2 \theta}$, $f''(0, \theta) = \frac{2\nu h^3}{(\nu h - \cos^2 \theta)^2}$, ...

Если $\nu \rightarrow \infty$ ($\nu \rightarrow 0$), то сумма $M + N$ равна:

$$M + N = \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{2}{\left[1 + \left(\frac{kh}{b}\right)^2\right]^{3/2}} + \frac{1}{\left[1 + \left(\frac{(k-1)h - \zeta}{b}\right)^2\right]^{3/2}} + \right. \\ \left. + \frac{1}{\left[1 + \left(\frac{(k+1)h + \zeta}{b}\right)^2\right]^{3/2}} \right\}, \quad (19)$$

т. е. влияние свободной поверхности жидкости на величину R_y такое же, как и влияние твердой стенки.

Для случая $h = \infty$ из равенства (11) получаем:

$$R_{y_0} = \frac{\rho Q^2}{16\pi b^2} \left\{ 1 - \frac{1}{\left[1 + \left(\frac{\zeta}{b}\right)^2\right]^{3/2}} + N_0(b, \zeta, \nu) \right\}, \quad (20)$$

где

$$N_0 = \frac{16\nu b^2}{\pi} \int_0^{1/2\pi} d\theta \nu. \text{ p. } \int_0^{\infty} \frac{e^{2\lambda\zeta}}{\nu - \lambda \cos^2 \theta} \sin(2b\lambda \sin \theta) \sin \theta \lambda d\lambda. \quad (21)$$

Поступая аналогично предыдущему, находим слагаемые функции N_0 :

$$N_{0_1} = -16\nu^2 b^2 \int_0^{1/2\pi} \exp\left(\frac{2\nu\zeta}{\cos^2 \theta}\right) \cos\left(\frac{2\nu b}{\cos^2 \theta} \sin \theta\right) \frac{\sin \theta}{\cos^4 \theta} d\theta, \quad (22)$$

или, при достаточно больших значениях b :

$$N_{0_1} \approx 4e^{2\nu\zeta}. \quad (23)$$

Для N_{0_2} при больших b имеем:

$$N_{0_2} \approx \frac{2}{\left[1 + \left(\frac{\zeta}{b}\right)^2\right]^{3/2}} + \\ + \frac{1}{\pi} \sum_{n=2}^{\infty} R_n \int_0^{1/2\pi} (-1)^{n+2} \frac{n! \cos^{2(n-1)} \theta \sin \theta d\theta}{i^n 2^{n-3} (\nu b)^{n-1} \left(\sin \theta - i \frac{\zeta}{b}\right)^{n+1}}. \quad (24)$$

При $\nu \rightarrow \infty$ R_{y_0} равно:

$$R_{y_0} = \frac{\rho Q^2}{16\pi b^2} \left[1 + \frac{1}{\left[1 + \left(\frac{\zeta}{b}\right)^2\right]^{3/2}} \right]. \quad (25)$$

Приведенные выражения для R_y источника (стока) могут быть использованы для определения приближенных значений силы засасывания гребных винтов при плавании судна на мелководье и на глубокой воде. Если в (25) устремить $\zeta \rightarrow -\infty$, то придем к известному решению задачи о приближенном определении коэффициента засасывания t_0 при работе гребного винта на месте вблизи стенки в безграничном потоке жидкости (5).

Одесский институт
инженеров морского флота

Поступило
6 V 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ М. Д. Хаскинд, Прикладн. матем. и мех., 9, 3, 257 (1945). ² А. А. Костюков, там же, 18, 2, 225 (1954). ³ Н. Е. Кочин, Собр. соч., 2, 1949, стр. 105. ⁴ А. А. Костюков, Прикладн. матем. и мех., 17, 3, 275 (1953). ⁵ А. А. Костюков, Тр. Одесск. инст. инж. водн. трансп., отд. вып. (1940).